**Господствующие стили математического мышления**

Стиль - понятие, развивавшееся тысячелетия в искусстве, литературе, языке и означавшее целостность образной системы, единство средств художественной выразительности. Например, в архитектуре известны стили - античный, готика, классический, барокко, модерн и другие. С 70-х годов XX в. в исследованиях по истории и методологии науки было введено и широко обсуждалось понятие стиля научного мышления.

Аналогично можно говорить о стиле мышления в математике: это целостное единство содержания и формы математического творчества и его результата - научного произведения; это единство идеи и ее доказательства (обоснования и изложения). Стиль является неотъемлемой характеристикой личности автора и его математического творчества (под личностью здесь понимается отдельный ученый, сообщество, научная школа).

Каждый выдающийся математик отличался собственным стилем творчества, проявлявшимся во многих произведениях. Для Пифагора и его школы характерен мистико-математический стиль, т.е. изотерическое мировоззрение, отрывки из которого выглядят для непосвящённого то как религиозное, то как философское знание. Для Демокрита - математический атомизм, ставший первым предвестником дифференциального и интегрального исчислений. Для Евклида - строго последовательный, предельно лаконичный, я бы сказал, аскетический стиль аксиоматики. Для Архимеда - гениальный своей простотой и смелостью механико-геометрический стиль доказательств (во многом схожий с корпускулярно-механическим стилем И.Ньютона, понимавшего мир как совокупность корпускул, движущихся по одним и тем же неизменным, раз навсегда установленным законам). Стиль Архимеда и Ньютона возникает при восхождении мысли от содержательного к формальному, от конкретно-физического к абстрактно-математическому уровню понятий.

Прямо противоположен по направленности стиль Г.Лейбница, шедшего от философии к математике, от философско-теологической модели бытия (монадологии) к более конкретному уровню - анализу бесконечно малых.

Стиль голографичен, т.е. узнаваем по отдельному произведению. Прочитав кусок из древнего текста об аксиомах и постулатах, мы сразу узнаем его автора - Евклида. Несколько страниц из книги XIX века об основаниях геометрии однозначно укажут на их автора - Н.И.Лобачевского, Я.Бойаи или Б.Римана. Поэтому и в математике работает герменевтика - теория понимания, возникшая в типично гуманитарных областях - теологии, филологии, юриспруденции.

Стоит отметить известную мысль Ф.Клейна о двух типах математиков - интуитивистах и формалистах. Первые стремятся проникнуть в сущность проблемы и "увидеть" результат (путем озарения, инсайта), потом сформулировать теоремы и доказать. Но доказательство для них - дело второстепенное.

Для вторых наоборот: главное - доказать теорему - тщательно, скрупулезно, не только одним, но и вторым, и третьим способами, чтобы проверить и перепроверить доказанное, убедиться в получении "абсолютной истины".

Большинство выдающихся математиков относятся к интуитивистам (в последние века - П.Ферма, Р.Декарт, Л.Эйлер, Н.И.Лобачевский, Б.Риман, А.Пуанкаре, Л.Брауэр, Г.Вейль и другие). Но немало известных ученых гармонично сочетали в своем стиле и глубочайшую интуицию, и строгую логику - Гаусс, например.

Можно говорить также о стилях, определяемых излюбленными методами математика, либо связями с приложениями, либо истоками идей (из естествознания, управления, философии или даже политики).

Как видим, стили чрезвычайно разнообразны и определяются неповторимым сочетанием следующих трёх факторов:

* 1. Личностью учёного (его одухотворённостью, эмоциями и интеллектом, памятью, волей, системой ценностей, преобладанием дискретных или непрерывных процессов в мышлении, нацеленностью на открытие, новизну или на обоснование ранее полученного знания, на доказательство, ориентацией на красоту идеи или на пользу и т.п.). Всё это составляет гуманитарную, субъективно человеческую и наиболее богатую составляющую стиля.
  2. Специфическими свойствами математического знания (требованием его аподиктичности - доказательности и неопровержимости, трансцендентностью, умозрительностью и формально-знаковым характером, тремя фундаментальными структурами - арифметической, алгебраической, топологической, ориентацией на истину, а не пользу, его связью с приложениями в естественных и гуманитарных науках). Это "объективная" составляющая стиля, наиболее независимая от личности учёного.
  3. Социально-культурным контекстом данного времени, определяемым: а) спецификой культуры - восточной или западной; б) господствующим мировоззрением - мифологическим, религиозным или философским, а также ведущей ориентацией эпохи - на гармонию (как в древней Греции), или на духовное совершенствование (как в средние века), или на материально-технический прогресс (как в новое время, в последние четыре столетия), или на поиски гармонии человека и природы (с XXI века); в) нацеленностью научного сообщества в текущий период математики на эмпирические или теоретические методы обоснования теорем, на алгоритмический (генетический) или аксиоматический способы развития и изложения полученной информации, на конкретные или абстрактные задачи, на практический или теоретический способы организации математического знания и т.п.

Эти три фактора во взаимодействии и образуют необычайное богатство математических стилей как единства формального и содержательного, духовного и материального, фантастического и реального, гуманитарного и естественнонаучного и других элементов знания.

Каковы же главные стили, как их классифицировать, систематизировать - по каким основаниям?

Большинство людей мыслят в рамках двузначной логики, поэтому и стили мышления удобнее всего представить как расположенные между двумя противоположными полюсами А и -А (как аттракторами - центрами притяжения мышления самых различных ученых). Отсюда естественно ввести классификацию стилей по линии противопоставления: 1) содержательный стиль - формальный стиль (или близкое к ним деление: конкретный - абстрактный стиль, частное - общее, имея в виду стремление одного ученого к решению конкретных задач, а другого наоборот - к построению абстрактно-формальных схем и их применению к решению частных вопросов); 2) дискретный - непрерывный (в частности, алгебраический - геометрический), 3) платонистский - неплатонистский (в частности, классический, в духе теоретико-множественной математики, - интуиционистский, в духе интуиционизма Л.Э.Я.Брауэра). Кроме подобных делений с философско-методологических позиций, возможны гуманитарные классификации: 1) национальный - интернациональный, 2)индивидуальный, неповторимый - повторяющийся, 3) временный, относящийся к данной эпохе - "вечный", внеэпохальный, 4) относящийся к определенной математической школе - "внешкольный" и т.п.

Рассмотрим их подробнее на примерах сопоставления стилей отдельных ученых. Из сравнения и будет видно - чей стиль более содержателен, чей более формален, более непрерывен или более дискретен.

Сравним И.Ньютона и Г.Лейбница.

Области их интересов в математике во многом сходны - это начала дифференциального и интегрального исчислений, вариационного исчисления, аналитическая геометрия. Но постановка проблем, формулировка задач, подходы к их решению, методы решения, философия и особенности мышления - различны и нередко противоположны.

Ньютон во всем основателен, фундаментален, требователен к себе - вследствие этого медлителен. Лейбниц гораздо более разбросан и тороплив. Получив результат, спешит опубликовать. Англичанин эмпиричен, строит приборы, проводит тщательную проверку выводов, стремится избегать гипотез, не обоснованных опытом ("hypotesis non fingo"). Немец - сторонник чистого умозрения, теоретик, не слишком затрудняющий себя обоснованием многочисленных идей (догадок, обобщений, аналогий), непрерывно выдвигаемых им. Ньютон идет от конкретного к абстрактному - от фактов к законам и теории в целом, математика для него - лишь часть естествознания. Лейбниц обычно мыслит от общего к частному, от абстрактного к конкретному - от философской схемы монадологии к ее интерпретации в математике - идеям дифференциала и интеграла. Математика и логика для него - нечто вроде формального раздела философии. Создатель "Математических начал натуральной философии" мыслит целостными геометрическими образами, ему по душе правополушарное мышление, мышление непрерывным. Основоположнику математической логики ближе алгебраические формы, дискретные символы, левополушарное мышление

Таким образом, хотя стиль каждого ученого глубоко индивидуален, а выдающегося - просто неповторим, тем не менее можно сделать вывод, что стиль Ньютона в основном геометро-механический, а стиль Лейбница -алгебро-логический. Это вполне соответствует и культуре их стран. Англия, как известно, родина эмпиризма, оплот индуктивизма и индивидуализма. Германии же более присуще чисто теоретическое, формально-схематическое мышление, движение мысли от абстрактного к конкретному, а следовательно - дедуктивизм, стремление подчинить индивидуальное, частное - тоталитарному целому.

Сходным образом, можно сравнить стили мышления Д.Гильберта и Л.Э.Я.Брауэра. Они заложили 2 программы обоснования математики - формализм и интуиционизм. Сходство и различие их стилей (как специалистов по основаниям) легче всего обнаружить при сравнении позиций в дискуссии по основаниям математики, которая проходила то разгораясь, то затухая в 1910-е - 20-е годы. Обсуждалось значение теории множеств для математики, роль аксиоматического метода, формализации, абстракции актуальной бесконечности, законы логики (в особенности закон исключенного третьего), связи между математикой, языком, логикой, существование математических объектов, природа и методы математического мышления, проблема реальности.

Брауэр критикует классическую (теоретико-множественную) математику за необоснованность, неубедительность ее слишком умозрительных, "лихих" абстракций. Гильберт защищает идеалы Кантора. Брауэр опирается в качестве философского фундамента на "непосредственно данную реальность", на переживания индивида - в этом смысле ему близки буддизм, экзистенционализм, философия потока сознания. Гильберт берет за основу объективную реальность, данную в коллективном чувственном опыте. Его философия - платонизм и неокантианство.

В дискуссии обсуждались 5 главных проблем: 1) проблема непротиворечивости и полноты теории (математики), 2) обоснования теории, 3) существования математических объектов, 4) природы познания, 5) реальности и ее единства.

**Проблема непрерывности и полноты.**

Брауэр: классическая математика противоречива, т.к. опирается на теорию множеств, содержащую парадоксы. Новая (интуиционистская) математика рассматривает мир мысленных процессов, развертывающихся в последовательность элементарных актов (шагов). Результаты этих процессов - математические объекты и конструкции.

Гильберт: классическая математика непротиворечива, ее теории полны, т.к. а) ее конструкции продуманы и признаны математическим сообществом, б) она прекрасно работает в практике. Бессмысленна замена классической математики на интуиционистскую, т.к. последняя неполна, это обрезанная (секвестированная) математика.

**Проблема обоснования.**

Брауэр: только такая математика обоснована, которая соответствует критериям интуиционизма как конструктивному обобщению человеческого опыта. Аксиоматический метод и формализация не выражают сущности математического мышления, т.к. скрывают за языковой формой эту сущность. Убедительное обоснование математики дает лишь интуиция как непосредственное внутреннее безъязыковое переживание образов, идущих из глубины "я". Лишь по требованию социума ученый вынужден облекать эти образы в языковую форму и тем искажать их (в точности, как у Ф.И.Тютчева: "мысль изреченная есть ложь"). У Гильберта же математика вырождается в игру формулами.

Гильберт: классическая математика обосновывается коллективным опытом научного сообщества. Окончательное обоснование даст теория доказательств. Она является "протоколом о правилах мышления". Ее существенной частью являются формализм и аксиоматический метод. Задача науки - освобождение от субъективизма, который достиг своего наивысшего выражения в интуиционизме.

**Проблема существования математического объекта.**

Брауэр: математический объект существует, если он построен явно или его построение возможно с помощью алгоритма. Теоремы о существовании без построения не имеют никакого значения.

Гильберт: объект существует, если он непротиворечив. Доказательсва существования сокращают и экономят мысль. Они всегда были вехами математического прогресса.

**Проблема природы мышления.**

Брауэр: математическое мышление опирается на интуицию (прежде всего интуицию времени, интуицию раздвоения единого). Существуют исходные принципы мышления, но они лишь результат свободного творения математика-индивида. Изначально математическое исследование не зависит ни от языка, ни от логики. Главный метод мышления - интроспекция. Обыденное знание выше формального. Существуют неразрешимые проблемы.

Гильберт: математическое мышление основано на интеллектуальной ясности. До математики мы имеем опытные представления, конкретные объекты. Математика начинается со знаков, обозначающих эти объекты, и с логики, дающей надежные выводы. Математика интерсубъектна (является результатом коллективного творчества) и, вообще говоря, объективна (в платонистском смысле). Формальное знание выше обыденного. Мир познаваем, все математические проблемы в принципе разрешимы.

**Проблема реальности и единства мира.**

Брауэр: реальность - это сознание индивида, это образы, мыслеформы, восходящие от внутренней сферы к внешнему миру. Это субъективная реальность. Существует ли объективная реальность, единая для всех индивидов, - открытый вопрос.

Гильберт: существует объективная реальность, данная нам наглядно, в качестве чувственных переживаний до какого то ни было мышления. Единство мира проявляется в математике как универсальном языке, раскрывающем сущность мира.

Как мы знаем, в споре не оказалось победителя. Интуиционистская и теоретико-множественная математики дополняют друг друга.

Гильберт и Брауэр работали в различных областях. Гильберт ясен, последователен, логичен. Более склонен к формальному мышлению, что особенно видно на теории доказательств. Он платонист и кантианец. Его стиль можно назвать формально-платонистским. Это господствующий стиль, т.к. абсолютное большинство математиков - платонисты.

Брауэр же пытался оторваться от платонизма, порвать с античной традицией математиков оперировать идеальными объектами подобно материальным предметам. Отсюда впечатление противоречивости. Хотя с точки зрения классически мыслящего ученого он действительно противоречив: работал и теоретико-множественными методами (в топологии), и интуиционистскими, создавая принципиально новую неплатонистскую математику.

Определенными сдвигами в неплатонистском направлении стали также конструктивизм, теория категорий, некоторые теории в логике. Действительно, если радикализировать позицию Брауэра, высказать её ещё яснее убрать из его философско-математических высказываний натуральные числа, то останется только алгоритм. Тогда не важно ЧТО преобразуется, а важно КАК (само преобразование). По идейному подходу это близко к теории алгорифмов, -исчислению А.Черча, теории категорий. В одном из направлений конструктивизма - теории алгорифмов А.А.Маркова (мл.) главное - само преобразование, но алгорифм понимается платонистски. Однако уже -исчисление, метафорически выражаясь, логика без переменных. Теорию категорий Ю.И.Манин назвал социологическим подходом, т.е. это как бы структуры без элементов, на что первым обратил внимание Ф.У.Ловер.

В чём состоит неплатонистский стиль мышления?

в преодолении мышления целостными "недвижными" понятиями, подобными языковым формам или материальным вещам, и утверждении мышления движущимися образами, становящимися мыслеформами, следовательно, переходными, дробными объектами - фракталами; оперирование ими требует и неплатонистской логики - мышления как бы дробными понятиями, суждениями, умозаключениями;

в отказе от классической тройки: элемент, структура, система, и утверждении системы без элементов, но со структурой (законом);

в отказе от субъект-объектного расщепления бытия, признании его ограниченности и в утверждении единого бытия, в котором слиты объект и субъект.

Подобно тому, как в начале ХХ века в естествознании возникла неклассическая наука, а к концу века - постнеклассическая, также возникла неклассическая математика (интуиционизм), а позже стала развиваться постнеклассическая (например, фрактальная геометрия). Их отличие - в сдвиге к картине мира, в которой в математическое знание включён идеальный мыслящий субъект, в отказе от жёсткой структурности (как в теоретико-множественной картине). Есть классы и структура, но нет элементов. Это предполагает предельно высокий уровень абстрактности (отсюда у конкретно мыслящих математиков возникает ощущение пустоты категорных форм).

Неплатонизм предполагает мышление самоподобными объектами - фракталами. Их странность в том, что невозможно выделить части (они совпадают с целым) - у них нет структуры как связи элементов. В то же время есть закон. Например, это формула Б.Мандельброта: Zn+1 = Zn2 + C.

Таким образом, интуиционизм, метаматематика, фрактальная геометрия образуют зачатки неплатонистской математики - области свободно становящихся объектов, относительно которой возникает ощущение, что в ней НЕТ классических (теоретико-множественных) понятий, или их может не быть - они уходят на второй план. В то же время и здесь ЕСТЬ неизменные идеальные объекты, например, алгоритм, фрактал (как формула, организующая его, или соответствующая геометрическая картинка, мыслимая как завершённое целое) - но это при платонистской интерпретации, тогда исчезает специфика неплатонизма, его шарм, брауэровский привкус.

Мы получаем противоположности, отрицающие друг друга (НЕТ и ЕСТЬ) - с точки зрения двузначной логики.

Учёному же, стремящемуся к мудрости (философу), необходимо преодолеть ограниченность двузначности - подняться над противоположностями и, следовательно, искать МЕЖДУ "существует" и "не существует", то есть, в области становления - именно здесь область роста постнеклассической математики.

Эта область заполнена одними лишь монстрами - странными объектами, подобно кентавру совмещающими в себе взаимоисключающие свойства, например, наличие структуры при отсутствии элементов, неподвижность и вечное движение, живость и мертвенность - как фракталы, а также непрерывность при недифференцируемости, конечность площади при бесконечности периметра - как давно открытые некоторые функции и фигуры. Причём исторически первый монстр - это иррациональные числа (VI в. до РХ). В гармонической картине мира древних греков этих чисел как бы нет, и в то же время они налицо - как диагональ квадрата.

На единичном отрезке прямой рациональные числа (вида m/n) образуют множество меры 0 (их почти нет), а иррациональные - меры 1 (это почти все числа). Подобным же образом почти всё, что есть во всей математике как мире всех возможных миров - это монстры, а прекрасные гармоничные непротиворечивые понятия образуют множество меры 0. Это наилучший из всех возможных миров. Это наш мир, поскольку человеческий род в принципе прекрасен и может устойчиво существовать (жить) лишь в окружении прекрасного. Так монадология Лейбница и антропный принцип сходятся в хаосе - промежуточной области вечного становления, между "да" и "нет". Хаос здесь уступает своей творящей стороной.

Таким образом, сравнивая Гильберта и Брауэра, мы видим, что неплатонистский стиль последнего отрицает оперирование "ставшими", неподвижными формами и ведет к математике "абсолютно текучего", в котором нет целых понятий, но (гипотетически) возможны фрактальные - дробные понятия, суждения, умозаключения. Философией, наиболее близкой к такой - синергетической трактовке Брауэра, является даосизм как учение о становящемся, но никогда не ставшем бытии.

Стиль Брауэра (как основателя интуиционизма) можно назвать интуиционистско-неплатонистским, (предшествующим синергетическому стилю мышления). Жизнь=математика=музыка=искусство - все слилось в его противоречивой, мятущейся и мятежной душе отрицателя основ, стремящегося к Единому, понимаемому в духе восточной философии. Известные слова Бюффона "Человек - это стиль" (как в быту, так и в науке) относятся ко всем описанным ученым. В частности, манера поведения, особенности личной жизни Брауэра коррелируют с его поисками неплатонизма в математике.

Подобные пары математиков, дискутировавших или параллельно совершавших одни и те же открытия и отличавшиеся стилями, неоднократно встречаются в истории науки, на что обращает внимание И.М.Яглом 8 . Он обращает внимание на универсальность двух типов мышления: левополушарного и правополушарного, арифметико-алгебраического и геометрического. Именно этим отличаются Пифагор и Фалес (как создатели теоретической математики), Аристотель и Платон (разработчики философии математики, один - создатель логики, второй - его учитель, мысливший яркими картинками), Я.Бойаи и Н.И.Лобачевский (создатели неевклидовых геометрий), Г.Грасман и У.Р.Гамильтон (внешняя алгебра и кватернионы), К.Вейерштрасс и Б.Риман (алгебраическая теория функций и геометрическое направление теории аналитических функций), С.Ли и Ф.Клейн (теория групп) и другие.

Лево- и правополушарный типы мышления обусловлены спецификой физиологии человеческого мозга, лежат в основе и соответствующих стилей. Если согласиться с Бюффоном, что стиль несёт в себе индивидуально-личностный привкус, то:

стиль = тип + индивидуальность.

Таким образом, среди гигантского количества стилей можно выделить главные и классифицировать их по парам противоположностей:

содержательный - формальный (близкое деление: конкретный - абстрактный);

дискретный - непрерывный (близкое деление: арифметико-алгебраический - геометрический);

платонистский - неплатонистский (исторически-преходящее деление: теоретико-множественный - интуиционистский), как мышление дискретными целостными понятиями и мышление переходными, дробными, фрактальными мыслеобразами.

XX век впервые после великих греков через интуиционизм, конструктивизм, метаматематику, теорию категорий, фрактальную геометрию обозначил отход от господствовавшего тысячелетия платонистского стиля.

### Список литературы

1. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XX столетии. М.-Л., 1937. ч. 1. -432 с.
2. Вейль Г. Математическое мышление. -М., 1989. -400 с.
3. Гильберт Д. Основания геометрии. -М.-Л., 1948. -491 с.
4. Рид К. Гильберт. -М., 1977. -307 с.
5. Гейтинг А. Интуиционизм. -М., 1965. -200 с.
6. Панов М.И. Методологические проблемы интуиционистской математики. -М., 1984. -224 с.
7. Манин Ю.Н. Лекции по алгебраической геометрии. -М., 1970. -ч.1. Аффинные схемы. -133 с.
8. Яглом И.М. Почему высшую математику открыли одновременно Ньютон и Лейбниц? // Число и мысль. Вып. 6. М; 1983. С. 99-125.

9. Войцехомич В. Э. Господствующие стили математического мышления