## Роль интуиции и неявного знания в формировании стиля математического мышления.

Результатом работы математика вне зависимости от стиля мышления являются доказательные рассуждения. Но доказательство как процесс - опять же вне зависимости от стиля мышления - не обходится без участия и некоторых нерациональных моментов. У А. Пуанкаре мы встречаем выражение "математическое творчество" [1]. Он и Ж. Адамар в своих философско-математических исследованиях много внимания уделяли именно творческой стороне математического мышления. Исследуя процесс математического открытия, Ж. Адамар выделил ряд его основных этапов [2]. Первый этап - это когда "подготовка", происходит осознанное исследование проблемы; второй этап - "инкубация", когда проблема как бы вытесняется в подсознание и исследователь может вообще забыть о ней; третий и центральный этап - "озарение", когда решение проблемы вдруг неожиданно "прорывается" в сознание (иногда этот этап сопровождается психологическим предчувствием); и последний, заключительный этап проверки и теоретического оформления результатов.

Движущей силой творческого процесса в математике является интуиция - особая способность мышления к неосознанным как бы свернутым умозаключениям, которые затем логически, дискурсивно необходимо как бы развернуть. Разумеется, развернуть мы можем только само умозаключение, а не деятельность интуиции как таковую. Мы не можем алгоритмизировать ее прежде всего потому, что она полностью скрыта в подсознании, и мы осознаем только ее результаты.

В настоящее время выяснено, что на этапе инкубации, предшествующем озарению, неосознаваемые образы могут трансформироваться в так называемое неявное знание [4]. В результате озарения это неявное знание может быть вербализовано и затем преобразовано посредством дискурсивных рассуждений в явное математическое теоретическое знание, выраженное непосредственно в символах и терминах математики.

Роль интуиции в математическом творчестве очевидна. Без ее участия невозможно ни одно хоть сколько-нибудь крупное математическое открытие. Вообще решение любой задачи, выходящей за рамки тавтологии, непременно содержит в себе интуитивный элемент. Его присутствие всегда психологически ощутимо, поскольку утверждение предшествует собственно доказательству. Математик сначала формулирует на основе результатов работы интуиции некоторый вывод, а затем его уже обосновывает на языке математической теории.

Можно предположить, что вследствие такого статуса интуиции в математическом исследовании, а также ее личностного характера [3], особенности деятельности интуиции и будут определять в основном стиль мышления того или иного математика. В этом смысле мы можем говорить о более или менее интуитивном стиле математического мышления, то есть о математиках-интуитивистах и о математиках-рационалистах, или, следуя А. Пуанкаре, математиках-аналитиках. По-другому он их называет соответственно геометрами и логиками [5]. К первым А. Пуанкаре причисляет Ли и Римана, ко вторым - Эрмита и Вейерштрасса. Очень высоко редкостную математическую интуицию Римана оценивает и Ф. Клейн [7], при этом он отмечает ведущую роль интуиции в математическом исследовании.

Дадим здесь краткую характеристику аналитического и интуитивного математического мышления. Говорят, что математик обладает интуитивным стилем мышления, когда работая долго над проблемой, он неожиданно получает решение, которое он еще формально не обосновал. Также интуитивисту присуща способность быстро делать очень удачные предположения о том, какой из подходов к решению задачи окажется наиболее эффективным. В противоположность аналитическому интуитивное мышление характеризуется тем, что в нем отсутствуют четко определенные этапы. Оно основано на свернутом восприятии всей проблемы сразу. Человек получает ответ, который может быть правильным или неправильным, мало осознавая при этом процесс, посредством которого он получил правильный ответ. Обычно интуитивное мышление осуществляется в виде скачков, быстрых переходов, с пропусками отдельных звеньев в процессе решения. Эти особенности требуют проверки выводов аналитическими средствами.

Аналитическое мышление позволяет отчетливо выразить отдельные этапы в процессе решения задачи и кому-либо рассказать о них. Оно может принимать форму отточенного дедуктивного рассуждения, в котором используется логика и которое имеет четкий план. Интуитивное и аналитическое мышление дополняют друг друга.

Разница в стилях мышления интуитивистов и аналитиков очевидна, хотя и те, и другие выдающиеся ученые- математики. Тем не менее, совершенно определенно А Пуанкаре утверждает, что не только интуитивистами, но и логиками управляет интуиция - некоторая особая чисто математическая интуиция чистого числа. Она помогает увидеть скрытые аналогии, что в математике играет зачастую решающую роль, и затем уже продуктивно воспользоваться аксиомой математической индукции. Поэтому, как считает А Пуанкаре, аналитики искусные мастера силлогизма. Интуиция чистого числа, им свойственная, не является чувственной, и поэтому аналитики почти не ошибаются. Но именно такой стиль математического мышления по-настоящему уникален. Аналитики-творцы очень редки. Так оценивает роль интуиции в формировании стиля математического мышления А. Пуанкаре [5].

Здесь возникает законный вопрос - насколько далеки друг от друга эти два вида интуиции? И правомерно ли вообще аналитикам прописывать какую-либо интуицию? Ясно одно - в действиях аналитиков мы видим не одну только логику. Ведь прежде, чем мы сможем применить аксиому математической индукции, необходимо "увидеть" некоторую скрытую аналогию. А при этом выход за рамки тавтологии и дискурсии неизбежен.

А. Пуанкаре оставляет открытым этот вопрос, настаивая лишь на незаменимости термина "интуиция". Другой исследователь научного творчества, М Полани, считает, что в любом случае, в том числе и для аналитиков, необходимо преодоление логического разрыва, а значит, и необходимо присутствие интуитивных элементов [4]. Этот свой вывод М Полани обосновывает построением аналогии между так называемой геделевской процедурой и правилами открытия, выработанными А. Пуанкаре. Геделевская процедура заключается в прибавлении формально неразрешимого в какой-либо богатой системе высказывания в качестве независимой аксиомы. Напомним, что истинность геделевского высказывания не может быть проверена в рамках существующей аксиоматической системы. Эта система может, по Геделю, все время таким образом пополняться. При этом не может быть создана универсальная система аксиом, не нуждающаяся в дополнении. Это следует из теорем Геделя по следствию, называемому теоремой Геделя о неполноте [8]. Открытие, по А. Пуанкаре, совершается по принципу аналогии и далее опирается на аксиому математической индукции. При этом каждая последующая теорема есть следствие предыдущей. В заключение остается повторить все эти действия в обратном порядке. Теперь, если учесть, что в геделевской процедуре включение новой аксиомы обосновывается личностными суждениями, поскольку новая аксиома независима по отношению к уже имеющимся, можно делать вывод о правомерности построенной аналогии [4].

Другим фактором, существенно влияющим на формирование стиля математического мышления конкретного математика, можно назвать неявное знание. Это то знание, которым мы пользуемся неосознанно. Можно принять, что оно представляет собой результат неосознанного умозаключения. Вследствие неосознаваемости этого знания математик вне зависимости от стиля мышления не может включить его в доказательство, хотя оно незримо там присутствует в качестве скрытых лемм. Например, доказательство того, что всякое замыкание делит плоскость в точности на два множества точек, и что переход из одного множества в другое обязательно связан с пересечением границы между ними, даже в самом упрощенном виде не предусмотрен в аксиомах Эвклида, хотя эта операция там встречается буквально сплошь и рядом. Чтобы убедиться в этом, достаточно открыть любой учебник по геометрии. Знакомство с теорией множеств, где означенное утверждение доказывается, в школьной программе не предусмотрено [9].

Далее, в доказательстве методом от противного неявно используется закон исключенного третьего и закон противоречия. Это вообще относится ко всем законам логики. До известных пределов это не так уж важно, однако в конце концов были обнаружены парадоксы математики, которые впоследствии пытался преодолеть интуиционизм, предлагая свою логику, в которой, в частности, нет места закону исключенного третьего. Заметим, что такова особенность неявного знания вообще - до известного момента его не замечают, а как только оно становится знанием явным, оказывается, что его обоснование проблематично.

Вообще все неявное знание, присущее отдельной личности, многослойно и неоднородно. В целом оно опирается на так называемый комплекс неосознанных ощущений, определяющийся психологией личного восприятия. Поэтому неявное знание личностно, то есть целиком связанно с индивидуально-психологическими особенностями личности.

Априорное знание также представляет собой часть неявного знания. Как это показал еще И. Кант, математика как наука построена на прочном фундаменте этого априорного знания, которое носит доопытный характер. Вначале формируется слой неявных онтологических предпосылок, относящихся к пониманию мира в целом. В частности, это представление о трехмерности пространства, о единстве мира. Неявные онтологические предпосылки представляют собой фундамент для формирования знания конкретной личности вообще, в том числе и математического. Затем начинается формирование слоя неявного априорного знания, имеющего особое значение именно для занятий математикой. Это неявное знание имеет вид неформализуемых в математике понятий, таких, как количество, множество, непрерывность, дискретность. Строго говоря, понятия эти, опять-таки, не только математические, но и онтологические, так как необходимы для нормальной ориентации человека во внешнем мире. В дальнейшем, по-видимому, происходит формирование образов чисел от нуля до девяти включительно, а так же простейших образов геометрических фигур, в том числе и пространственных. Также на этом уровне закладывается представление об основной математической операции сложения. Мы видим, насколько велика роль априорной составляющей неявного знания именно в математике. Да это и не удивительно - ведь математика наиболее тесно связана с умственной деятельностью и особенностями мышления. Важно то, что априорное знание несмотря на всю свою личностность, интерсубъективно. Это объясняется очевидностью общности анатомических и физиологических особенностей субъектов познания, а также сходностью протекания психологических реакций.

Итак, весь этот комплекс неявного знания необходим для выполнения простейших математических действий. А все умения и навыки, присущие личности, базируются наряду с осознанным, алгоритмизированным знанием на знании неявном, представляющем собой личностный опыт освоения математики и передающемся во время обучения. Если индивидуально-психологические особенности личности не способствуют успешному освоению чужого опыта а, значит, и формированию своего как неявного личностного знания, то и обучение в целом вряд ли будет успешным. Это следует из теории неявного знания М. Полани [4].

Неявное знание как априорное и как опыт математического мышления в основном и составляет предпосылки, необходимые для формирования определенного стиля математического мышления. Можно сказать, что неявное знание и представляет собой тот инструмент, при помощи которого, или, точнее которым и осуществляется в дальнейшем само математическое исследование. Это именно та основа, на которой и формируются предпосылки, составляющие костяк метода, позволяющего получить теоретические утверждения, которыми, по выражению М. Полани, наполнены учебники [4]. Необходимость неявного знания объединяет и интуитивистов и аналитиков.

Неявное знание с трудом поддается не только алгоритмизации, но и простейшей вербализации. Наряду с априорным знанием оно включает в себя также нерационализированные результаты работы математической интуиции, в своем роде издержки математического мышления. Это объясняется тем, что не все неявное знание может "проявиться". Некоторая его часть так и не может "пробиться" из области подсознания. Там это остаточное неявное знание может вступить во взаимодействие с неявным знанием, уже накопленным личностью. Это чаще всего происходит в так называемых пограничных состояниях - во время засыпания или вообще во сне. Мыслительный процесс практически никогда не прекращается. Все неявное знание как таковое можно рассматривать как материал для мыслительной деятельности математика, как источник гипотез. Ведь неявное знание через комплекс неосознанных ощущений напрямую связано с областью бессознательного и поэтому обладает значительной эвристической мощностью. Понятно, что чем более мощным слоем неявного знания обладает математик, тем больше оригинальных идей он может высказать. В итоге сложнейшей интеграции встраивания остаточного неявного знания в неявное знание, уже существующее, неожиданно, как бы сами собой могут решаться давно забытые задачи. Накапливаясь, нерационализированные издержки работы интуиции могут породить путаный, непоследовательный стиль математического мышления. Даже у сильных математиков часть продуктов деятельности математической интуиции остается нерационализированной и как бы "застревает" в подсознании, иногда становясь помехой мыслительному процессу и осложняя его. В отдельных случаях может возникнуть иллюзия доказательства. Видимо, это и происходит в основном в случаях получения все новых "доказательств" теоремы Ферма.

Такое неявное знание в математике представляет собой скрытые леммы или определения, имеющие вид аксиом, как, например, постулат параллельных до открытия неевклидовой геометрии.

Понимание того, что неявное знание в математике действительно существует и играет важнейшую роль, пришло в математику только в нашем столетии, при попытках перестройки математики на единой аксиоматической основе. Выяснилось, что многие доказательства некорректны из-за наличия явно не сформулированных, недоказанных или ложных посылок. Для повышения уровня математической строгости необходимо указанные посылки выявить и обосновать. Без решения этой проблемы формализация доказательств невозможна, в том числе и с помощью компьютера [10]. Математическая логика, как относительно новая область математики, также занимается обоснованием важных методов доказательства математики, считавшихся ранее эвристическими, и входивших в неявное знание. В качестве примера здесь может быть рассмотрен такой интересный и распространенный метод математического доказательства как метод интерпретаций, имеющий весьма богатую историю [11]. Практически все серьезные математические методы прошли извилистый и долгий путь от неявной эвристики до строгих теоретических утверждений. В этом смысле вся история математики может рассматриваться как история рационализации ее неявных методов и предпосылок, ранее составляющих личностную компоненту математического знания, и в результате исторического обоснования преобразовавшихся в строгие математические утверждения.

Важность неявного знания в математике обусловлена также высоким уровнем абстрагирования, присущим математике вообще и математике современной в особенности, как преимущественно науке об абстрактных структурах. Здесь речь идет о необходимости постоянного осуществления математической символизации, которая заключается в отождествлении определенного феномена реальности с некоторым математическим символом. Известно, что "исходные" математические символы "держатся" на априорном знании, о чем более подробно говорилось здесь ранее. Поэтому кажущаяся очевидность и легкость этой символизации не должна никого вводить в заблуждение. А когда речь идет о математических абстракциях более высокого уровня, значительно удаленных от первоначальных математических объектов, ситуация еще более осложняется. Это связано с возникновением так называемого неявного коэффициента математической символизации, который через неявное знание и далее через область бессознательного должен связывать абстракцию математики с реальностью. Разумеется, это объяснение несколько схематично. Причина здесь в том, что эти связи глубоко личностны и составляют часть неявного знания, которое неспецифицируемо [4], вследствие чего алгоритмизировать их не представляется возможным. Более подробное исследование возможно лишь в конкретных случаях, когда хорошо известна история формирования какого-либо математического понятия. Простейшим примером в этом смысле является понятие бесконечно малой в математике - можно рассмотреть ее историю от лейбницевской монады до термина математического анализа. Определенно можно сказать лишь то, что подобные связи формируются на уровне личностного практического освоения математики. Понятно, что при этом возможно неосознанное чисто механическое использование абстракций, когда в них видят нечто вроде счетных палочек. Чем выше уровень абстракций, тем солиднее неявный коэффициент математической символизации и более вероятна такая возможность. В подобных случаях, разумеется, возможность рационализации значительно снижается.

Думается, что можно не сомневаться в том, что интуиция и неявное знание практически формируют стиль математического мышления. По крайней мере можно утверждать, что именно эти факторы формируют математика прежде всего как интуитивиста, в идеале - как генератора новых идей. Однако нельзя не отметить, что иногда стиль мышления математиков-интуитивистов настолько необычен, что ни они сами, ни исследователи их творчества не могут дать этим идеям достаточного теоретического обоснования. Например, индийский математик С. Рамануджан обладал уникальной способностью суммировать сложнейшие ряды пользуясь исключительно неявными эвристиками, которые не мог рационализировать даже он сам. Понятно, что их автор обладал солидным запасом неявного знания, и это целиком определяло стиль его математического мышления [6]. Вопрос о возможности обоснования методов Дж. Буля, которым он пользовался при создании булевой алгебры, также до сих пор остается открытым [12]. Здесь также можно говорить об особом значении интуиции и неявного знания в стиле мышления Дж. Буля.

В общем-то подобные примеры нетипичны, но, разумеется, тот факт, что интуиция и неявное знание в основном определяют стиль математического мышления и имеют при этом личностный характер, не может не осложнять понимание между математиками и затрудняет освоение математическим сообществом новых оригинальных идей. Дело в том, что согласно теории неявного знания, такие идеи невозможно чисто механически "пересадить" из одной головы в другую. Эта операция является просто механической вербализацией и ничего общего с подлинным пониманием не имеет. В свете теории неявного знания очевидно, что подлинное наше понимание невозможно без наведения связей с нашим личностным знанием - возможно, через какие-то ключевые термины, имеющие значение в рамках нашего личностного знания. То есть все чужие идеи или чужое знание должны укорениться в почве нашего личностного знания, стать частью нашего познавательного опыта. Относительно математики это значит, что новое математическое знание должно стать частью нашего личного опыта математического мышления.

Однако, поскольку математика отличается строгой общезначимостью символов и терминов, а также предельным дедуктивизмом, по крайней мере, в плане теоретического обоснования, понимание в области математики предполагает сведение личностного фактора к минимуму и не допускает интерпретативных отклонений от общезначимой теории. Следствием недопустимости личностной интерпретативности математической теории является необходимость серьезных личностных затрат на практическое освоение теории в целях решения задач. Наверное, каждый человек, имеющий хотя бы школьный опыт практического освоения математики согласится, что математика - особый предмет, требующий углубленного изучения и дающийся далеко не всем. А ведь еще необходимо участие личностного фактора при осуществлении математической символизации - этого нельзя избежать при исследовании на самом высоком метатеоретическом уровне (об этом здесь говорилось ранее).

Итак, неявное знание личностно, и значит, строго индивидуально. Именно эта его особенность и обуславливает уникальность, ценность и незаменимость каждой творческой личности, независимо от рода деятельности. Разумеется, это не означает, что неявное знание в математике никак не связано с определенным социокультурным контекстом конкретной исторической эпохи. Понятно, что социокультурная среда необходима для формирования самых простейших навыков и умений, свойственных человеку.

Но поскольку неявное знание в целом неоднородно, что мы и показали здесь ранее, постольку роль социокультурной среды в формировании различных его типов также различна. При формировании первоначального слоя неявного знания, включающего онтологические предпосылки и образующего фундаментальный слой всего неявного знания личности в целом, важен не столько конкретный социокультурный контекст, сколько контекст собственно человеческий, само человеческое общение. Без неявного знания этого типа не может сформироваться и неявное знание другого типа, образующееся при обучении математике и решении задач. И вот для формирования неявного знания этого типа, которое затем станет плацдармом для серьезных самостоятельных занятий математикой и математических открытий, социокультурный контекст является решающим. Это значит, что важным является то, в какой социокультурной среде растет будущий математик, насколько эта среда связана с математическим сообществом, какие в нем господствуют идеалы математического познания. Чем более глубоки эти связи, тем более разнообразные математические впечатления испытывает будущий математик, тем более мощным будет слой его неявного знания и тем больше будет возможностей у личности для успешной математической деятельности - при условии равной одаренности.

Интересно, что разрыв во времени в формировании этих двух типов неявного знания может быть достаточно длительным. Например, Якоб Штейнер, швейцарский пастух, который в девятнадцать лет научился у Песталоцци читать и писать, благодаря своей геометрической интуиции достиг положения профессора Берлинского университета [7]. Он высказывал идеи, выходящие за рамки математики прошлого века, хотя они и были лишены доказательств. Этот не единственный, но редкий случай тем не менее достаточно показателен.

Важно отметить, что необходимость участия личностного фактора - а именно неявного знания и интуиции - в процессе формирования и передачи нового знания в математике не может исключить конечной интерсубъективности его содержания, которая достигается в результате теоретического обоснования этого нового знания. А такое теоретическое обоснование возможно вследствие общности анатомии и физиологии субъектов познания, общности их социального опыта и языковых навыков. Благодаря этому возможна исследовательская деятельность вообще, а не только в области математики.

### Список литературы

1. Пуанкаре А. Наука и метод // О науке. М.: "Наука", 1990.
2. Адамар Ж. Исследование психологии изобретения в области математики. М.: "Советское радио", 1970.
3. Султанова Л.Б. Взаимосвязь неявного знания и эвристической интуиции // Вестник МГУ, 1995. Серия философия.
4. Полани М. Личностное знание. М.: 1985.
5. Пуанкаре А. Ценность науки // О науке. М.: "Наука", 1990.
6. Левин В.И. Рамануджан - математический гений Индии. М.: 1968.
7. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. М.: 1989.
8. Успенский В.А. Теорема Геделя о неполноте. М.: 1982.
9. Мичи Д., Джонстон Р. Компьютер-творец. М.: "Мир", 1987.
10. Серебряников О.Ф. Эвристические принципы и логическое мышление. М.: 1979.
11. Султанова Л.Б. Рациональная реконструкция эволюции математического метода интерпретаций // Материалы научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых /XXXXY/. Уфа, 1994.
12. Стяжкин Н.И. Становление идей математической логики. М.: 1964.

13. Султанова Л. Б. Роль интуиции и неявного знания в формировании стиля математического мышления.