Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования

"Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины"

Математический факультет

Кафедра МПМ

Методика изучения показательной и логарифмической функции в курсе средней школы. Простейшие показательные и логарифмические уравнения и неравенства

Реферат

Исполнитель:

Студентка группы М-32 Малайчук А.Ю.

Научный руководитель:

Канд. физ-мат. наук, доцент Лебедева М.Т.

Гомель 2007

Содержание

Введение

1. Образовательные цели изучения темы "Показательная и логарифмическая функции" в средней школе

2. Методика изучения свойств степеней и логарифмов. Введение определения показательной школе показательной функций, ее свойства и их приложения

З. Понятие обратной функции и методика его введения

4. Методика изучения логарифмической функции, ее свойств и их приложения. Производная показательной и логарифмической функции

Заключение

Литература

## 

## Введение

Ознакомление учащихся с показательной и логарифмической функциями начиная с изучения свойств степеней и логарифмов.

Курс алгебры знакомит учащихся с понятием степени с рациональным показателем. Таким образом для любого основания степени  (где , ). Можно построить функцию: , , область определения которой – множество действительных чисел, необходимо ввести определение, степени с иррациональным показателем. Используемое свойство степени с основным, например, большим единицы (возрастании), рациональное приближение иррационального числа α: r1< α< r2. Исходя из графического изображения зависимости показателя степени и значения степени, показывается, что найдется такое значение y, которое будет наибольшим среди всех ar1 и наименьшим среди всех ar2 , которое можно считать значением aα.

## 1. Образовательные цели изучения темы "Показательная и логарифмическая функции" в средней школе

Изучение темы "Показательная, логарифмическая и степенная функции" в курсе алгебры и начала анализа предусматривает знакомство учащихся с вопросами:

Обобщение понятия о степени; понятие о степени с иррациональным показателем; решение иррациональных уравнений и их систем; показательная функция, ее свойства и график; основные показательные тождества:

; ;

тождественные преобразования показательных выражений; решение показательных уравнений, неравенств и систем; понятие об обратной функции; логарифмическая функция, ее свойства и график; основные логарифмические тождества:

 ; ;

тождественные преобразования логарифмических выражений; решение логарифмических уравнений, неравенств и систем; производная показательной функции; число е и натуральный логарифм; производная степенной функции; дифференциальное уравнение радиоактивного распада.

Основная цель – привести в систему и обобщить имеющиеся у учащихся сведения о степени, ознакомить их с показательной, логарифмической и степенной функциями и их свойствами (включая сведения о числе е и натуральных логарифмах); научить решать несложные показательные и логарифмические уравнения, их системы (содержащие также и иррациональные уравнения).

Рассматриваются свойства и графики трех элементарных функций: показательной, логарифмической и степенной. Систематизация свойств указанных функций осуществляется в соответствии с принятой схемой исследования функций. Достаточное внимание должно быть уделено работе с логарифмическими тождествами: тождественные преобразования логарифмических выражений применяются как при изложении теоретических вопросов курса (например, при выводе формулы производной показательной функции), так и при выполнении различного рода упражнений, например, решение логарифмических уравнений и неравенств.

Приведен краткий обзор свойств степенной функции  в зависимости от различных значений показателя р.

Особое внимание уделяется показательной функции как той математической модели, которая находит наиболее широкое применение при изучении процессов и явлений окружающей действительности. Рассматриваются примеры различных процессов (например, радиоактивный распад, изменение температуры тела); показывается, что решение дифференциальных уравнений, описывающих эти процессы, является показательная функция. В связи с этим для показательной функции дается формула производной, вывод которой проводится с привлечением интуитивных представлений учащихся.

В ходе изучения свойств показательной, логарифмической и степенной функций учащиеся систематически решают простейшие показательные и логарифмические уравнения и неравенства, а также иррациональные уравнения. По мере закрепления соответствующих умений целесообразно также предлагать им уравнения и неравенства, сводящиеся к простейшим в результате несложных тождественных преобразований.

## 2. Методика изучения свойств степеней и логарифмов. Введение определения показательной школе показательной функций, ее свойства и их приложения

Ознакомление учащихся с показательной и логарифмической функциями начиная с изучения свойств степеней и логарифмов.

Курс алгебры знакомит учащихся с понятием степени с рациональным показателем. Таким образом для любого основания степени  (где , ). Можно построить функцию: , , область определения которой – множество действительных чисел, необходимо ввести определение, степени с иррациональным показателем. Используемое свойство степени с основным, например, большим единицы (возрастании), рациональное приближение иррационального числа α: r1< α< r2. Исходя из графического изображения зависимости показателя степени и значения степени, показывается, что найдется такое значение y, которое будет наибольшим среди всех ar1 и наименьшим среди всех ar2 , которое можно считать значением aα.

Затем формируется определение показательной функции: функция, заданная формулой y=ax (, ), называется показательной функцией с основанием a, и формулируемые основные свойства: D(ax)=R; E(ax)=RТ; ax возрастает при a>1 и ax убывает при 0<a<1; напоминаются основные свойства степеней. Т.о. показательная функция есть систематизация, обобщение и расширение знаний учащихся о свойствах степени.

В качестве приложения свойств показательной функции рассматриваются решения простейших показательных уравнений и неравенств.

Логарифмическая функция – новый математический объект для учащихся. К понятию логарифма учащихся подводят в процессе решения показательного уравнения ax=b в том случае, если b нельзя представить в виде степени с основанием a. Наше уравнение в случае b>0 имеет единственный корень, который называют логарифмом b по основанию a и обозначают logab, т.е. alogab=b. Одновременно с введением нового понятия учащиеся знакомятся с основным Логарифмическим тождеством. При работе с логарифмами применяются следующие их свойства, вытекающие из свойств показательной функции:

При любом  () и любых положительных x и y, выполнены равенства:

1. loga1=0

2. logaa=1

3. logaxy= logax+ logay

4. logax/y= logax- logay

5. logaxp= plogax

При доказательстве используется основное логарифмическое тождество:

x=alogax; y=alogay

Рассмотрим доказательство 3:

xy=alogax a logay=alogax+logay т.е. xy=alogax+logay=alogaxy, ч.т.д.

Основные свойства логарифма широко применяются в ходе преобразования выражений, содержащих логарифмы.

№497 (Алгебра и начала анализа, 10-11)

Найти , если:



т.е. равны основания логарифмов, равны значения логарифмов  равны логарифмируемые выражения. Этот прием рассуждения в дальнейшем будет применим при решении простейших логарифмических уравнений.

## З. Понятие обратной функции и методика его введения

Наиболее доступным введение логарифмической функции можно было бы провести после введения понятия обратной функции. Однако методика изложения темы об обратной функции сложна из-за сложных самого материала. Тема "Понятие об обратной функции" приведена в учебнике "Алгебры и начала анализа. 10-11" и рассчитана на необязательное изучение. В эту тему входят:

1) обратимость функций, связанное с решением следующих задач: вычислить значение функции  по данному значению аргумента  и найти значение аргументов, при которых функция  принимает данное значение . Вторая задача не всегда имеет единственное решение (например, для , ). Функция принимает каждое свое значение в единственной точке области определения, называется обратимой, т.е. если  обратима, а число  принадлежит , то уравнения  имеет решение и притом только одно.

2) Обратная функция – как новое понятие – поясняется на конкретных примерах.

Определение. Пусть  - произвольная обратимая функция. Для любого числа  из ее области значений  имеется в точности одно значение , принадлежащее области определения , такое, что: . Поставив в соответствие каждому  это значение , получим новую функцию  с областью определения  и областью значений .

Задача. Найти функцию, обратную функции





Покажем, что уравнения  при любом значении  имеет единственное решение .

, где .

Если вспомнить область значения данной функции , то получаем положительный ответ. Таким образом, наша функция обратима и обратная ей функция



Алгоритм решения таких задач: найти  и  данной функции ; поменять местами в формуле переменные , т.е. получить формулу  и из полученного равенства выразить  через .

В более сложных случаях (когда функция не является обратимой на всей области определения) следует пользоваться теоремой: об обратной функции:

Если функция f возрастает (или убывает) на промежутке I, то она обратима. Обратная к f функция g, определенная в области значений f, также является возрастающей (или убывающей).

Задача. Найти функции, обратные функции y=x2-3x+2.

x=y2-3y+2=y2-2y\*3/2+9/4-9/4+2=(y-3/2)2-ј => (y-3/2)2=x+1/4, где x≥-1/4 => y1=3/2+(x+1/4)1/2 и y2=3/2-(x+1/4)1/2.

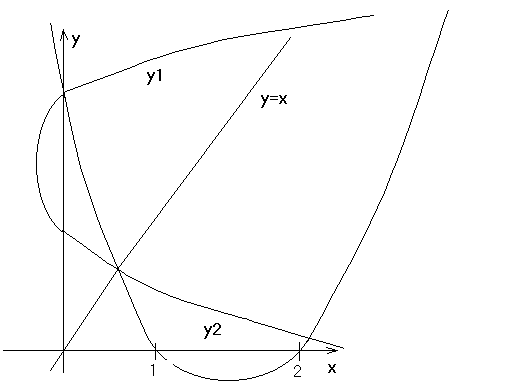
D(y1)= D(y2)=E(x2-3x+2)=[-1/4;+∞)

Для нахождения областей значений обратных функций обратимся к графику, используя следующее свойство:

Графики функции f и обратной к ней функции g симметричны относительно прямой y=x.

x2-3x+2=0 => x1=1; x2=2

xв=3/2; yв=-1/4



Из графика видно, что

E(y1)=[3/2;+∞), E(y2)=(-∞;3/2].

## 4. Методика изучения логарифмической функции, ее свойств и их приложения. Производная показательной и логарифмической функции

Методика изучения логарифмической функции

Изучение логарифмической функции начинается с выделения определения: функцию, заданную формулой  называют логарифмической функцией с основанием . Основные свойства выводится из свойств показательной функции:

1. ,

т.к. при решении уравнения

  ,

т.е. любое положительное число  имеет логарифм по основанию .

2. ,

т.к. по определению логарифма любого действительного числа  справедливо равенство:

,

т.е. функции вида  принимает значение  в точке .

3. Логарифмическая функция на всей области определения возрастает (при a>1) или убывает (при 0<a<1).

Покажем, что  при a>1 возрастает. Пусть  и , надо доказать, что: . Допустим противное, т.е. что . Т.к. показательная функция  при a>1 возрастает, то из неравенства  следует:   , что противоречит выбору . Следовательно:  и функция  при a>1 – возрастает.

Т.к. при a>1 функция возрастает, то логарифмическая функция положительна при x>1 и отрицательна для 0<x<1 (для основания 0<a<1 – наоборот). На основании рассмотренных свойств строится график этой функции.

Производная показательной и логарифмической функции

Приступая к изучению производной показательной и логарифмической функций, учащиеся знакомятся с новым для них числом e. Необходимость появления этого числа связывается с решением задачи о касательной к графику показательной функции, с угловым коэффициентом, равным 1, т.е. без доказательства принимается следующее утверждение:

существует такое число, больше 2 и меньшее 3 (это число обозначают буквой е), что показательная функция y=ex в точке 0 имеет производную, равную 1, т.е. (eΔx-1)/Δx 🡪 при Δx🡪0.

Теорема: функция eж дифференцируема в каждой точке области определения и (ex)'= ex. Опр.: Натуральным логарифмом называется логарифмом по основанию е:

ln x = logex

Верно соотношение:

eln a=a => ax=(eln a)x=ex ln a.

Теорема: показательная функция аx дифференцируема в каждой точке области определения, и:

(ax)'=axln a

Дифференцируемость логарифмической функции следует из того, что: графики у=ах и у=log ax симметричны относительно у=х. Показательная функция дифференцируема в любой точке, а ее производная не обращается в нуль, график показательной функции имеет негоризонтальную касательную в каждой точке. Поэтому и график логарифмической функции имеет невертикальную касательную в любой точке, а это равносильно дифференцируемости логарифмической функции на ее области определения.

Производная логарифмической функции для любого х из области определения находится по формуле: ln'x=1/x.

x=eln x => x'=(eln x)', n/r/ x'=1 => (eln x)'=1 => eln x(ln x)'=1 => ln'x=1/eln x=1/x.

## Заключение

Изучение темы "Показательная, логарифмическая и степенная функции" в курсе алгебры и начала анализа предусматривает знакомство учащихся с вопросами:

Обобщение понятия о степени; понятие о степени с иррациональным показателем; решение иррациональных уравнений и их систем; показательная функция, ее свойства и график; основные показательные тождества:

; ;

тождественные преобразования показательных выражений; решение показательных уравнений, неравенств и систем; понятие об обратной функции; логарифмическая функция, ее свойства и график; основные логарифмические тождества:

 ; ;

тождественные преобразования логарифмических выражений; решение логарифмических уравнений, неравенств и систем; производная показательной функции; число е и натуральный логарифм; производная степенной функции; дифференциальное уравнение радиоактивного распада.

## Литература

1. К.О. Ананченко "Общая методика преподавания математики в школе", Мн., "Унiверсiтэцкае",1997г.

2.Н.М.Рогановский "Методика преподавания в средней школе", Мн., "Высшая школа", 1990г.

3.Г.Фройденталь "Математика как педагогическая задача",М., "Просвещение", 1998г.

4.Н.Н. "Математическая лаборатория", М., "Просвещение", 1997г.

5.Ю.М.Колягин "Методика преподавания математики в средней школе", М., "Просвещение", 1999г.

6.А.А.Столяр "Логические проблемы преподавания математики", Мн., "Высшая школа", 2000г.