**Введение**

Глава I. Вероятностно - статистическая линия в базовом школьном курсе математики

1.1 Статистическое мышление и школьное математическое образование

1.2 Психолого-педагогические аспекты изучения теории вероятностей в средней школе

1.3 Тематическое планирование к учебникам Федерального комплекта

Глава II. Методические рекомендации преподавания основ теории вероятностей в средней школе

2.1 Вероятность случайных событий

2.2 Дискретность пространств элементарных событий

2.3 Классическое и статистическое определение вероятности

2.4 Алгебра событий

Глава III. Факультативный курс «Элементы теории вероятностей» для 10 – 11 классов

3.1 Внеклассная работа по математике, факультативные занятия 2. Случайные события. Урок – лекция

3.2 Классическое определение вероятности. Уроки-практикумы

3.2.1 Лабораторная работа

3.2.2 Практическая работа

3.3 Геометрическая вероятность. Урок – семинар

3.4 Основы теории вероятностей. Урок – консультация

3.5 Урок – игра «Восхождение на пик знаний»

Заключение

Список литературы

Приложение

**Введение**

До недавнего времени Россия оставалась одной из немногих стран с развитой системой образования, где вероятностно-статистические знания практически всегда оставались за пределами школьного обучения. С наступлением 21 века мы окончательно убедились в неотвратимости пришествия в среднюю школу стохастики, изучающей случайные явления.

Идея введения в школьную математику элементов теории вероятностей и статистики является привлекательной для наших педагогов. С другой стороны, большинство из них слабо представляют содержательно-методические основы обучения стохастики в школе, по этой причине многие с настороженностью и недоверием относятся к данному нововведению.

Поэтому в настоящее время одной из наиболее актуальных проблем методики преподавания математики является проблема введения в школьный курс вероятностно – статистической линии, которая давала бы возможность познакомить всех учащихся с миром случайного, с самых ранних лет формировать у них умение накапливать систематизировать представления о свойствах окружающих явлений, в большинстве своем имеющих стохастическую природу.

К особенностям новой линии можно отнести то, что в ней много эмпирики и рассуждений, мало формул, отсутствуют громоздкие вычисления, открыт большой простор для творческой деятельности учащихся.

Эта линия требует своеобразных форм, средств и приемов обучения, соответствующих возрасту и интересам учащихся: дидактических игр и экспериментов, живых наблюдений и предметной деятельности.

Изучение вероятностно – статистического материала должно быть направлено на развитие личности школьника, расширять возможности его общения с современными источниками информации, совершенствовать коммуникативные способности и умения ориентироваться в общественных процессах, анализировать ситуации и принимать обоснованные решения, обогащать систему взглядов на мир осознанными представлениями о закономерностях в массе случайных фактов.

Сегодня мы имеем первый комплект учебников для массовой школы, содержащие разделы по теории вероятностей. В связи с этим многие учителя оказались в нелегком положении. Большинство из них не помнит даже самих «элементов», не говоря уже о какой – то специальной методике их преподавания в школе, направленной на развитие особого типа мышления и формирования недетерминированных представлений.

Поэтому остро встает проблема методической готовности учителей, способных к успешной реализации вероятностно-статистической линии в школьном курсе математики.

Объектом исследования является процесс обучения элементам теории вероятностей на факультативных занятиях в средней школе.

В качестве предмета исследования выступает методика преподавания основ теории вероятностей в общеобразовательной школе.

Цель исследования – теоретически обосновать и содержательно представить факультативной курс «Элементы теории вероятностей» для 10-11 классов средней школы.

Исходя из цели исследования, были поставлены следующие задачи исследования:

1. проанализировать современные тенденции в исследованиях, посвященных вопросам введения в школьную математику элементов теории вероятностей и математической статистики;
2. представить практический материал – решение задач по данной теме, с выработанными методическими указаниями и рекомендациями;
3. разработать структуру, содержание и методику проведения факультативного курса «Элементы теории вероятностей» в старших классах средней школы;
4. провести апробацию.

В ходе решения поставленных задач использовались следующие методы исследования:

1. изучение и анализ учебно–методической и психолого-педагогической литературы по проблеме исследования;
2. теоретический анализ проблемы, определение основных положений исследования;
3. обобщение и анализ теоретико-методического материала;
4. решение задач по данной теме;
5. экспериментальное преподавание (апробация) направленное на выявление эффективности предлагаемой методики проведения факультативного курса «Элементы теории вероятностей» для 10-11 классов общеобразовательной школы.

**Глава I. Вероятностно - статистическая линия в базовом школьном курсе математики**

**1.1 Статистическое мышление и школьное математическое образование**

Каждая эпоха предъявляет свои требования к математической науке и математическому образованию. В настоящее время все более громкими становятся голоса методистов, которые ратуют за усиление вероятностно – статистической линии в школьном курсе математики, начиная с младших классов средней школы. Но многие учителя математики уже долгое время не сталкивались с вопросами комбинаторики, теории вероятностей, статистики, т. е. со всем тем, что входит в вероятностно – статистическое направление математики. Они нуждаются в расширении своих знаний по углубленным вопросам. Самым авторитарным исследователем в нашей стране в области теории вероятности и математической статистики был Борис Владимирович Гнеденко (1912-1995). Он был автором многих статей в журнале «Математика в школе».

Чему и как учить в школе, по-видимому, всегда будет принадлежать к числу вечных проблем, которые постоянно возникают даже после того, как им дано решение, лучшее по сравнению с предыдущим. И это неизбежно, потому что постоянно пополняются наши научные знания и подходы к объяснению окружающих нас явлений. Несомненно, что содержание школьного преподавания должно изменяться с прогрессом науки, несколько отставая от него и давая возможность новым научным идеям и концепциям принять приемлемые в психологическом и методическом отношении формы.

Однако считать, что содержание и характер школьного курса той или иной науки должны полностью определяться состоянием соответствующей научной отрасли знания и господствующими в ней представлениями о центральных ее понятиях, было бы грубейшей ошибкой. Подавляющее большинство школьников не станут специалистами в данной области науки. Из них выйдут как представители иных научных интересов и практических областей деятельности, так и представители свободных профессий - писатели, артисты, художники. Именно поэтому для всех учащихся необходимо получить в школе сведения об установившихся научных концепциях и приобрести твердые основы научных знаний, а кроме того умения логически рассуждать и ясно излагать свои мысли. Школа должна дать представления о том, что наука и ее концепция тесно связаны с практикой, из которой она черпает постановки своих проблем, идеи, а затем возвращает практике новые возможности решения основных ее проблем, создает для нее новые методы. Без этого образование будет неполноценным, оторванным от жизни и создаст для воспитанников школы многочисленные трудности. Вот почему на содержание школьного образования должны оказывать широко понятые требования практики наших дней и обозримого будущего.

В нашу жизнь властно вошли выборы и референдумы, банковские кредиты и страховые полисы, таблицы занятости и диаграммы социологических опросов. Общество все глубже начинает изучать себя и стремиться сделать прогнозы о самом себе и о явлениях природы, которые требуют представлений о вероятности. Даже сводки погоды в газетах сообщают о том, что "завтра ожидается дождь с вероятностью 40%".

Полноценное существование гражданина в сложном, вариативном и многоукладном обществе непосредственно связано с правом на получение информации, с ее доступностью и достоверностью, с правом на осознанный выбор, который невозможно осуществить без умения делать выборы и прогнозы на основе анализа и обработки зачастую неполной и противоречивой информации.

Мы должны научить детей жить в вероятностной ситуации. А это значит извлекать, анализировать и обрабатывать информацию, принимать обоснованные решения в разнообразных ситуациях со случайными исходами. Ориентация на демократические принципы мышления, на многовариантность возможного развития реальных ситуаций и событий, на формирование личности, способность жить и работать в сложном, постоянно меняющемся мире, с неизбежностью требует развития вероятностно – статистического мышления у подрастающего поколения. Эта задача может быть решена в школьном курсе математики на базе комплекса вопросов, связанных с описательной статистикой и элементами математической статистики, с формированием комбинаторного и вероятностного мышления [12]. Однако не только социально – экономическая ситуация диктует необходимость формирования у нового поколения вероятностного мышления. Вероятностные законы универсальны. Они стали основой описания научной картины мира. Современная физика, химия, биология, демография, социология, лингвистика, философия, весь комплекс социально – экономических наук построены и развиваются на вероятностно – статистической базе. Подросток не отделен от этого мира глухой стеной, да и в своей жизни он постоянно сталкивается с вероятностными ситуациями. Игра и азарт составляют существенную часть жизни ребенка. Круг вопросов, связанных с соотношениями понятий "вероятность" и "достоверность", проблема выбора наилучшего из нескольких вариантов решения, оценка степени риска и шансов на успех, представление о справедливости и несправедливости в играх и в реальных жизненных коллизиях – все это, несомненно, находится в сфере реальных интересов подростка. Подготовку к решению таких проблем и должен взять на себя курс школьной математики.

Сегодня в науке фундаментальное значение приобрело понятие случайного и уверенно пробивает себе дорогу отыскания оптимальных решений. Особенно назрела необходимость введения в школьное преподавание концепции случайного, и это вызывается не только требованиями научного и практического порядка, но и чисто методическими соображениями [11]. В то же время классическая система российского образования основана, прежде всего, на отчетливо детерминистских принципах и подходах и в математике, и в других предметах. Если не снять, то хотя бы ослабить противоречие между формируемой в стенах школы детерминистской картиной мира и современными научными представлениями, базирующимися на вероятностно – статистических законах, невозможно без введения основ статистики и теории вероятностей в обязательное школьное образование. Современная концепция школьного математического образования ориентирована, прежде всего, на учет индивидуальности ребенка, его интересов и склонностей. Этим определяются критерии отбора содержания, разработка и внедрение новых, интерактивных методик преподавания, изменения в требованиях к математической подготовке ученика. Одновременно само знакомство школьников с очень своеобразной областью математики, где между черным и белым существует целый спектр цветов и оттенков, возможностей и вариантов, а между однозначным "да" и "нет" существует еще и "быть может" (причем это "быть может" поддается строгой количественной оценке!), способствует устранению укоренившегося ощущения, что происходящее на уроке математики никак не связано с окружающим миром, с повседневной жизнью.

Согласно данным ученых-физиологов и психологов, а также по многочисленным наблюдениям учителей математики падение интереса к процессу обучения в целом и к математике в частности. На уроках математики в основной школе, в пятых-девятых классах, проводимых по привычной схеме и на традиционном материале, у ученика зачастую возникает ощущение непроницаемой стены между излагаемым абстрактно-формальными объектами и окружающим миром. Именно вероятностно-статистическая линия, или, как ее стали называть в последнее время, - стохастическая линия, изучение которой невозможно без опоры на процессы, наблюдаемые в окружающем мире, на реальный жизненный опыт ребенка, способна содействовать возвращению интереса к самому предмету "математика", пропаганде его значимости и универсальности. Наконец, концепция открытого общества, процессы европейской и мировой интеграции неразрывно связанны с взаимным сближением стран и народов, в том числе и в сфере образования. Россия, имея одну из самых мощных и признанных в мире традиций школьного математического образования, одновременно остается едва ли ни единственной развитой страной, где в основном школьном курсе математики нет основ статистики и теории вероятностей [7]. Наметившиеся в нашей стране тенденции экономических преобразований позволяют предположить, что в самом недалеком будущем обществом будут востребованы организаторы и участники производства нового типа, которыми должны будут стать многие выпускники школ. Столь необходимую для их деятельности стохастическую культуру надо воспитывать с ранних лет. Не случайно в развитых странах этому уделяется большое внимание: с элементами теории вероятностей и статистики учащиеся знакомятся уже с первых школьных лет и на протяжении всего обучения усваивают вероятностно – статистические подходы к анализу распространенных ситуаций, встречающихся в повседневной жизни.

Число примеров подходов к изучению вероятностно – статистического материала в средней школе можно было бы привести много, поскольку за последние два десятилетия практически каждая страна ввела этот материал в школьную программу и предложила один или несколько подходов к его изучению. Интересные работы появились в Польше, Швеции, Израиле, Франции. Проблемы, связанные с созданием системы изучения вероятностно – статистического материала в средней школе, в нашей стране освещается недостаточно. Анализ известных нам подходов к изучению элементов теории вероятностей и статистики в средних школах различных стран позволяет сделать следующие выводы:

- в подавляющем большинстве стран этот материал начинает изучаться в начальной школе;

- на протяжении всех лет обучения учащиеся знакомятся с вероятностно – статистическими подходами к анализу эмпирических данных, причем большую роль при этом играют задачи прикладного характера, анализ реальных ситуаций;

- в процессе обучения большая роль отводится задачам, требующим от учащихся работы в маленьких группах, самостоятельного сбора данных, обобщение результатов работы групп, проведение самостоятельных исследований, работ практического характера, постановки экспериментов, проведение небольших лабораторных работ, подготовки долгосрочных курсовых заданий – все это диктуется своеобразием вероятностно – статистического материала, его тесной связью с практической деятельностью;

- изучение стохастики как бы распадается на вероятностную и статистическую составляющие, тесно связанные между собой, во многих странах они дополнены небольшим фрагментом комбинаторики.

В нашей стране уже предпринимались неудачные попытки введения в школьный курс математики понятие вероятности события. В силу изолированности и инородности его по отношению к традиционному школьному курсу этот материал был вскоре изъят из программ и учебников.

Некоторый опыт обучения элементам теории вероятностей накоплен в школах с углубленным изучением математики, но и он лишь подтверждает тот факт, что попытки решить проблему путем введения в традиционный курс математики нового изолированного раздела обречен на провал. Изучение элементов теории вероятностей как замкнутого раздела программы, относящегося к «чистой», теоретической математике, полностью дискредитировало себя в глазах педагогов и привело к тому, что некоторые из них вообще выражают сомнения в том, что ее можно и нужно изучать в средней школе. В тоже время преподаватели физики, химии, биологии ощущают острую потребность в том, чтобы выразить основные закономерности этих наук на языке вероятностных понятий. Ведь современное состояние человеческих знаний о мире позволяет считать, что случайный характер присущ основным (базисным) явлениям микромира [9].

Появление в школьной программе вероятностно – статистической линии, ориентированной на знакомство учащихся с вероятностной природой большинства явлений окружающей действительности, будет способствовать усилению ее общекультурного потенциала, возникновению новых, глубоко обоснованных межпредметных связей, гуманитаризации школьного математического образования.

При отборе материала для новой лини школьного курса необходимо учитывать общеобразовательную значимость и мировоззренческий потенциал предлагаемых тем. Важно правильно оценить то, какие знания нужны современному человеку в повседневной жизни и деятельности, что из них потребуется ученику для изучения других школьных предметов, для продолжения образования, какой вклад могут внести эти знания в формирование различных сторон интеллекта ученика. Необходимо позаботиться так же о том, чтобы предложенное содержание обеспечивало возможности органичного сопряжения нового учебного материала с традиционным, способствовало развитию внутрипредметных связей.

И в нашей стране сегодня проходит неизбежный процесс вхождения стохастики как равноправной составляющий в обязательное школьное математическое образование.

Все государственные образовательные документы последних лет содержат вероятностно-статистическую линию в курсе математики основной школы наравне с такими привычными линиями, как "Числа", "Функции", "Уравнения и неравенства", "Геометрические фигуры" и т.д.

**1.2 Психолого-педагогические аспекты изучения теории вероятностей в средней школе**

Исследование психологов (Ж.Пиаже, Е. Фишбейн) показывают, что человек изначально плохо приспособлен к вероятностной оценке, к осознанию и верной интерпретации вероятностно-статистической информации. О том же говорят и эксперименты, проведенные Е. А. Бунимович (Москва, один из авторов учебников, содержащих элементы стохастики) на базе московской гимназии № 710, ярославской гимназии № 20 и калужской гимназии № 2. В экспериментальных исследованиях вероятностные представления школьников старших профильных классов, приступивших к углубленному курсу математики, но еще не изучавших вероятностные разделы. Результаты исследования недвусмысленно говорят о том, что даже хорошее знание и понимание других разделов математики само по себе не обеспечивает развитие вероятностного мышления и не избавляет даже от тривиальных вероятностных предрассудков и заблуждений [7].

Приведем один пример. Учащимся задавали вопрос:

" На одной карточке спортлото (6 из 49) зачеркнуты номера

1, 2, 3, 4, 5 и 6,

а на другой

5, 12, 17, 23, 35 и 41.

Как вы думаете, выигрыш какого набора чисел более вероятен?".

Из всех участников эксперимента 22% старшеклассников ответили, что вероятнее второй карточки. Интересен практически одинаковый ответ двух школьников разных школ (Москва и Ярославль): " Вообще – то оба случая равновероятны, но второй случай более вероятен", выражающий очевидное противоречие между бытовыми и научными представлениями школьников.

Любопытно, что профильные химико-биологические экономические классы, где курс математики существенно глубже базового, но отсутствует вероятностно – статистический материал, дают почти такой же результат (до 30 % ответов – «выигрыш второго набора более вероятен»). Не сильно отличаются от приведенных данных и результаты ответов на аналогичный вопрос в тесте, предложенном в 1998 году учителям математики на курсах повышения квалификации в Москве.

Отметим кстати, что известный любитель математических игр и парадоксов Мартин Гарднер по аналогичному поводу написал, что на самом деле выгодней вычеркивать комбинации 1, 2, 3, 4, 5 и 6 или другую же «регулярную» комбинацию. Шансы на выигрыш те же, а вот сумма при выигрыше может оказаться существенно больше, так как едва ли кому – то придет в голову зачеркнут номера порядка с 1 по 6, и потому в случае удачи не придется ни с кем делить призовой фонд.

В экспериментальной гимназии № 710 Е. А. Бунимовичем была проведена экспериментальная работа по преподаванию начальных основ вероятности в разных возрастных группах: во 2 –6 классах на занятиях развития творческих способностей; в 5 – 6, 8- 9 и 10- 11 – на уроках математики.

Опыт показал, что в возрасте начальных классов еще многое в представлениях учеников о мире недостаточно сформировано, не хватает и математического аппарата (прежде всего – простых дробей) для объяснений представлений о вероятности. В то же время основы описательной статистики, таблицы и столбчатые диаграммы, а также основы комбинаторики, систематический перебор возможных вариантов на небольшом множестве предметов возможно и даже необходимо вводить в курс начальной школы [6].

Одновременно было обнаружено, что начинать изложение основ теории вероятностей в старших классах – малоэффективно. Наработанное к этому возрасту стремление к быстрой формализации знаний, сформированное традиционным курсом математики, желание усвоить на уроке прежде всего некоторый набор правил, алгоритмов и методов вычисления фактически заменяет формирование вероятностных представлений формальным выучиванием формул комбинаторики и вычисления вероятности по классической модели Лапласа.

В тоже время, как уже было сказано, обсуждение на качественном уровне вероятностных ситуаций с учащимися старших математических классов, усвоившими достаточно формальный курс основ теории вероятностей, показывает, сколько мало знание формул комбинаторики и классической вероятностной модели способствует развитию вероятностной интуиции изживанию традиционных вероятностных предрассудков.

Как известно, опыт преподавания основ теории вероятностей в школе в период реформы математического образования 60 – 70 гг. на абстрактно – формальном уровне, в традиционной схеме урока дал в основном негативный результаты и привел к изъятию этого материала из школьной программы. Материал оказался сложен, формален, плохо усваивался .

Описанная ситуация во многом схожа с известными проблемами преподавания геометрии в школе, где сегодня можно считать уже общепризнанной необходимость периода «наглядной геометрии» и предварительной работы с учащимися по формированию пространственных представлений до изучения систематических курсов планиметрии и стереометрии [7]. Работы психологов, на которые мы уже ссылались, также утверждают, что наиболее благоприятен для формирования вероятностных представлений возраст 10 – 13 лет, что примерно соответствует 5- 7 классу российской школы. При этом очевидно, что связь со сложностью уже исходных понятий классической теории вероятностей, в 5- 7 классе абсолютно невозможны аксиоматический подход к понятию вероятности, а часто и локальная дедукция при изложении основ теории вероятностей.

Экспериментальная работа в 5 и 6 классах по пропедевтики вероятностных представлений, проведению экспериментов со случайными исходами и обсуждению на качественном уровне их результатов показал, что этот незакрепленный формальными «обязательными результатами» период дает хорошее развитие вероятностной интуиции и статистических представлений ребят. C элементами статистического мышления необходимо начинать знакомить в школе в ряде предметов, а не только в курсе математики. Нужно сделать так, чтобы на уроках ботаники и зоологии, астрономии и физики, русского языка и истории время от времени в нужном месте были сделаны разумные замечания о случайности явлений, которые изучает данная научная дисциплина. Естественно, что математика при этом не может оставаться в стороне. Самые первые представления о мире случайного дети получают из наблюдений за ними в окружающей жизни. При этом важные характерные черты наблюдаемых явлений проясняются в ходе сбора статистических сведений и наглядного их представления. Умение регистрировать статистические сведения и представлять их в виде простейших таблиц и диаграмм уже само по себе характеризует наличие у школьника некоторого статистического опыта. В нем находят отражение самые первые, пусть еще не до конца осознанные представления о неоднозначности и изменчивости реальных явлений, о случайных, достоверных и невозможных результатах наблюдений, о конкретных видах статистической совокупности, их особенностях и общих свойствах. Эти умения дают возможность формировать правильное представление не только о явлениях с ярко выраженной случайностью, но и о таких явлениях, случайная природа которых неочевидна, и затушевана многими осложняющими восприятие факторами.

В быту и на работе выпускник средней школы постоянно сталкивается с необходимостью получения и оформление некоторых сведений. На уроках физики, химии, биологии при выполнении лабораторных и практических работ ученик должен уметь оформить результаты наблюдения и опытов; на уроках географии истории, обществоведения ему необходимо пользоваться таблицами и справочниками, воспринимать информацию, представленную в графической форме. Эти умения необходимы каждому человеку, т. к. со статистическим материалом, представленном в различной форме, он постоянно встречается во всех источниках информации, рассчитанных на массовую аудиторию, - в газетах, журналах, книгах, по телевидению и т. п.

Понимание характера изучаемого стохастического явления связано с умением выделять главное, видеть особенности и тенденции при рассмотрении таблиц, диаграмм и графиков. Простейшие навыки при «чтении» таблиц и графиков позволяют подметить некоторые закономерности наблюдаемых явлений, увидеть за формами представления статистических данных конкретные свойства явлений с присущими им особенностями и причинными связями.

Типические черты изучаемых явлений, их общие тенденции могут быть выявлены с помощью средних статистических характеристик. Умение пользоваться ими характеризует наличие у учащегося представлений, связанных с центральными тенденциями в мире случайного. Понимание смысла самых простых средних показателей, таких, как среднее арифметическое, необходимо каждому ученику.

Стохастический характер окружающих явлений не может быть раскрыт без понимания степени изменчивости. Поэтому возникает необходимость в количественной оценке разброса статистических данных, которая способствует более глубокому пониманию сущности явлений и процессов, дает возможность сравнивать статистические совокупности по степени их вариации.

Одним из важнейших компонентов стохастического мышления является понимание устойчивого в мире случайностей, упорядоченности случайных фактов. Нельзя допустить, чтобы стихийно воспринимаемые в жизни отдельные стороны случайных явлений учащиеся воспринимали вне всяких взаимосвязей. Центральное место занимают здесь представления, связанные с различными экспериментальными представлениями закона больших чисел. Самый простой и доступный путь состоит в формировании представлений о вероятности как о «теоретически ожидаемом» значении частоты при увеличении числа наблюдений. При этом понимание взаимоотношения между вероятностью и ее эмпирическим прообразом – частотой приводит осознанию статистической устойчивости частоты. В то же время важную роль играет и понимание того, что количественная оценка возможности наступления некоторого события может быть осуществлена до проведения эксперимента, исходя из некоторых теоретических соображений. Таким образом, приходим к вычислению вероятностей в классической схеме.

В том случае, когда при обучении математике вероятностная интуиция не развивается, вместо верных представлений и концепций учащимися усваиваются ложные взгляды, они высказывают ошибочные суждения.

Одной из важных целей изучения вероятностно – статистического материала в школе является развитие вероятностной интуиции, формирование адекватных представлений о свойствах случайных явлений. Ведь в жизни очень часто приходится осуществлять оценку шансов, выдвигать гипотезы и предложения, прогнозировать развитие ситуации, рассуждать о возможностях подтверждения той или иной гипотезы и т. п. представление о вероятности, которое усвоено в процессе организованного, систематического изучения, отличается от обыденного, житейского именно тем, что оно является носителем представлений об устойчивости, закономерности в мире случайного, позволяет наиболее полно и правильно делать выводы из имеющейся информации.

Отметим при этом, что равно неэффективны и даже опасны как ранняя формализация, так и другая крайность, получившая сейчас отражение в некоторых экспериментальных программах – бесконечные рассуждения о вероятности вне курса математики, вне построения вероятностных моделей [6].

**1.3 Тематическое планирование к учебникам Федерального комплекта**

В Министерстве образования Российской Федерации на 2002/03 учебный год принят новый Федеральный комплект учебников по различным предметам.

Одним из таких комплектов, содержание, которого отобрано с учетом современных тенденций развития математического школьного образования – учебно-методический комплект по математике 5 – 6–х классов под редакцией Г. В. Дорофеева и И.Ф. Шарыгина, для 7 – 9-х под редакцией Г. В. Дорофеева. Принципиальными особенностями курса является: усиление внимания к арифметике и формировании вычислительной культуры в ее современном понимании: более позднее начало систематического изучения алгебраического материала; введение новой для отечественной школы линии «Анализа данных», включающей комбинаторику, элементы теории вероятностей и статистики; включение в курс 5 – 6-х классов наглядной геометрии. Главная особенность методического аппарата заключается в том, что в этом комплекте заложена технология уровневой дифференциации, что позволяет работать как в сильных, так и в слабых классах, а также индивидуализировать учебный процесс в рамках одного комплекта. В комплект по каждому классу входят: учебник, рабочая тетрадь, дидактические материалы, методические пособия для учителя, в настоящее время издается сборник контрольных работ для 5– 6-х классов.

Тематическое планирование к учебникам Федерального комплекта, рассмотренных выше, представим в виде таблицы:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| УЧЕБНИК | РАЗДЕЛ  УЧЕБНИКА | КОЛЛИЧЕСТВО  ЧАСОВ |
| «Математика 5»  Под редакцией  Г. В. Дорофеева,  И. Ф. Шарыгина.  М.: Просвещение, Дрофа, 1998-2001. | Таблицы и диаграммы  Чтение таблиц с двумя входами.  Использование в таблицах специальных символов и обозначений.  Столбчатые диаграммы. | 8 часов  ( 5 часов в неделю, всего – 170 часов) |
| УЧЕБНИК | РАЗДЕЛ  УЧЕБНИКА | КОЛЛИЧЕСТВО  ЧАСОВ |
| «Математика 6»  Под редакцией  Г. В. Дорофеева,  И. Ф. Шарыгина.  М.: Просвещение,  Дрофа, 1998-2001. | Комбинаторика  Решение комбинаторных задач. Применение правила умножения в комбинаторике.  Вероятность случайных событий  Эксперименты со случайными исходами. Частота и вероятность случайного события. | 6 часов  9 часов  (5 часов в неделю, всего – 170 часов) |
| «Математика 7: Арифметика. Алгебра. Анализ данных»  Под редакцией  Г. В. Дорофеева,  С. Б. Суворова,  Е. А. Бунимович и др.  М.: Дрофа, 1999-2001. | Частота и вероятность  Частота случайного события.  Оценка вероятности случайного события по частоте.  Вероятностная шкала. | I вариант:  6 часов;  II вариант:  7 часов  I вариант:  ( 1 четверть – 5 часов в неделю;  2, 3, 4–3 часа в неделю, всего120 часов)  II вариант:  (4 часа в неделю, всего 136 часов) |
| УЧЕБНИК | РАЗДЕЛ  УЧЕБНИКА | КОЛЛИЧЕСТВО  ЧАСОВ |
| «Математика 8: Алгебра. Функции. Анализ данных»  Под редакцией  Г. В. Дорофеева,  С. Б. Суворова,  Е. А. Бунимович и др.  М.: Дрофа, 2000, 2001. | Вероятность и статистика  Статистические характеристики ряда данных: мода, медиаина, среднее арифметическое, размах. Таблица частот.  Вероятность равновозможных событий.  Классическая формула вычисления вероятности события и условия ее применения.  Геометрическая вероятность. | I вариант:  5 часов;  II вариант:  7 часов  I вариант:  (3 часа в неделю, всего-102 часа)  II вариант:  (1 полугодие - 4 часа в неделю;  2 полугодие – 3 часа в неделю, всего - 119 часов) |
| «Математика 9: Алгебра. Функции. Анализ данных»  Под редакцией  Г. В. Дорофеева,  С. Б. Суворова,  Е. А. Бунимович и др.  М.: Дрофа, 2000, 2001. | Статистические исследования  Генеральная совокупность и выборка.  Ранжирование данных.  Полигон частот.  Интервальный ряд.  Гистограмма.  Выборочная дисперсия, среднее квадратичное отклонение. | I вариант:  6 часов;  II вариант:  8 часов  I вариант:  (3 часа в неделю, всего-102 часа)  II вариант:  (4часа в неделю, всего-136 часов) |

Упомянутые книги написаны живым языком с постоянной опорой на здравый смысл и на жизненный опыт учащихся. В них предусмотрена разнообразная практическая деятельность читателя. Школьники учатся оценивать вероятность наступления несложных случайных событий сначала на качественном уровне, а количественные подсчеты вероятностей происходит позднее.

Попытаемся построить вероятностно – статистическую линию в курсе математики основной школы в следующей главе в рамках рассмотренных учебных комплектов.

методика школа факультатив теория вероятностей

**Глава II. Методические рекомендации преподавания основ теории вероятностей в средней школе**

**2.1 Вероятность случайных событий**

В соответствии с упомянутыми учебниками (глава I, § 3) в нашем курсе вводится ряд понятий теории вероятностей. Рассматриваются случайные, достоверные, невозможные, более вероятные, менее вероятные, маловероятные, равновероятные события. Новые термины связываются с известными из жизни словами – часто, редко, всегда, никогда, «это очень возможно», «это обязательно произойдет», «это маловероятно», «это никогда не случится» и другими, определяющими частоту случайных событий.

Курс начинается с того, что вводится базовое понятие *случайное событие.* Это такое событие, которое при одних и тех же условиях может произойти, а может не произойти. Например, купив лотерейный билет, мы можем выиграть, а можем и не выиграть, на очередных выборах партия может победить, а может и не победить, завтра на уроке математики ученика могут вызвать к доске, а могут и не вызвать.

События заглавными латинскими буквами. Приведем примеры.

А: в следующем году первый снег в Москве выпадет в воскресенье.

В: свалившийся со стола бутерброд упадет на пол маслом вниз.

С: при бросании кубика вы получите шестерку.

D: при бросании кубика вы получите четное число очков.

Все перечисленные выше события A,B,C,D – случайные.

*Невозможное событие* вводится как событие, которое в данных условиях произойти не может. Таковы, например, события E и F:

Е: в следующем году первый снег в Москве вообще не выпадет.

F: при бросании кубика вы получите семерку.

Если же событие при данных условиях обязательно произойдет, то его называют *достоверным.* Ниже указаны два таких события:

G: свалившийся со стола бутерброд упадет на пол.

H: при бросании кубика вы получите число меньше семерки.

Правда, достоверность события G оказывается под вопросом в невесомости. Но там обычно не едят бутерброд с маслом. Невозможные и достоверные события встречаются в жизни сравнительно редко. Можно сказать, что мы живем в мире случайных событий.

Отметим, что события достоверные и невозможные на этом предварительном этапе мы предлагаем не относить к случайным событиям. Опыт преподавания данного материала показал, что школьникам 10 – 12 лет трудно считать случайными те события, которые происходят всегда, либо не происходят никогда [7]. Введение предельных случаев, удобное для построения формальной теории, но противоречащее бытовым представлениям, оказывается преждевременным. Понятие случайного события соответственно уточняется на более поздних ступенях обучения.

Качественная оценка вероятности событий приводит к тому, что при обсуждении в классе на один и тот же вопрос может быть дано несколько разных ответов, которые могут считаться верными, что непривычно на уроке математики и для ученика, и для учителя.

Например, при обсуждении вероятности наступления события

"вам подарят на день рождения собаку"

ученики в зависимости от личных обстоятельств могут дать ответы:

"это маловероятное событие",

"это очень возможное событие",

"это достоверное событие".

При решении таких задач главное – приводимая аргументация, понимание школьника смысла используемых понятий. Если аргументация вполне логична и разумна, ответ следует считать верным.

Чтобы доказать, что данное событие – случайное, предлагается привести пример такой ситуации или, как говорят математики, такого *исхода,* когда событие происходит, и пример такого исхода, когда оно не происходит.

Так, событие D – случайное, потому что оно происходит, когда на кубике выпадает, например, четверка, и не происходит, когда на кубике выпадает, допустим, пятерка.

При бросании кубика может выпасть только от одного до шести очков, поэтому событие F – невозможное, а событие H – достоверное.

**Пример 1.** Бросаем два кубика. Какие из следующих событий невозможные, случайные, достоверные?

A: на кубиках выпало одинаковое число очков.

B: сумма очков на кубиках не превосходит 12.

C: сумма очков на кубиках равна 11.

D: произведение очков на кубиках равно 11.

*Решение.* Исход любого бросания можно описать двумя числами, выпавшими на кубиках. Например, (3,1) означает, что на первом кубике выпало число 3, а на втором – 1.

При исходе (1,1) событие A происходит, а при исходе (1,2) – не происходит. Значит, событие Аслучайное.

Событие B происходит при любом исходе: ведь каждое из двух чисел на кубике не превосходит 6, а значит, их сумма не превосходит 12. Поэтому событие Bдостоверное.

Событие С происходит при исходе (5,6), но не происходит при исходе (2,2). Значит, оно случайное.

Наконец, для события D нет исхода, при котором оно происходит: число 11 нельзя представить в виде произведения двух целых чисел от 1 до 6. значит, это событие невозможное.

**Пример 2.** В коробке 3 красных, 3 желтых, 3 зеленых шара. Вытаскиваем наугад 4 шара. Какие из следующих событий невозможные, случайные, достоверные?

A: все вынутые шары одного цвета.

B: все вынутые шары разных цветов.

C: среди вынутых шаров есть разноцветные.

D: среди вынутых шаров есть шары всех трех цветов.

*Решение.* Событие А – невозможное: нельзя вытащить из коробки 4 одноцветных шара (их только по 3 каждого цвета).

Событие В – тоже невозможное: разных цветов тоже не может быть больше 3, а вынутых шаров 4.

Событие С – достоверное: ведь все 4 шара, как мы уже выяснили, не могут быть одного цвета, поэтому среди них обязательно есть разноцветные.

Наконец, событие D – случайное. Закодируем исходы опытов первыми буквами цветов, в которые окрашены вынутые шары. Например: КЖЖЗ означает, что вынули один красный, два желтых и один зеленый шар; КЖЖЗ – пример исхода, при котором событие D происходит, а ККЖЖ – пример исхода, при котором D не происходит.

В ходе обсуждений различных примеров ученики убеждаются в том, что в мире случайных событий можно обнаружить закономерности и оценить шансы наступления различных событий.

Например, при бросании игрального кубика есть три шанса из шести, что выпадет четное число очков, только один шанс из шести, что выпадет пять очков и никаких шансов, что выпадет семь очков.

Однако рассматривая ситуацию с кубиком, ученик интуитивно опирается на гипотезу о "правильности" кубика, о равновероятности выпадения 1,2,3,4,5 и 6 очков при его подбрасывании.

Важно показать, что далеко не всегда можно точно вычислить шансы наступления того или иного события. Часто шансы приходится оценивать приблизительно – на основе жизненного опыта, уже имеющихся статистических данных или путем, проведения многократных экспериментов. Кстати, в дальнейшем, именно экспериментируя со случайными исходами, ученики убеждаются, что и кубик совсем не всегда оказывается "правильным". В качестве примера "неправильного" кубика демонстрируется кубик со сбитым центром тяжести (к одной из его граней изнутри подклеен пластилин) [7].

В задачах такого типа стоит обсудить с ребятами как общие статистические закономерности, так и индивидуальные особенности, в результате которых для разных людей возможны различные ответы на поставленные вопросы.

Покажем теперь линию развития задач по предложенной теме – от простых к более сложным. Первый блок задач может быть рассмотрен в классе со всеми учащимися, остальные – на кружке или факультативе.

**Задача 1.** Укажите, какие из следующих событий – невозможные, достоверные, случайные:

A: футбольный матч "Спартак" – "Динамо" закончится в ничью.

B: вы выиграете, участвуя в беспроигрышной лотерее.

C: в полночь выпадет снег, а через 24 часа будет светить солнце.

D: завтра будет контрольная по математике.

E: 30 февраля будет дождь.

F: вас изберут президентом США.

G: вас изберут президентом России.

**Ответ.** Событие В – достоверное, C, E, F – невозможные, A, D, G – случайные. Но если вы решаете эту задачу накануне выходного дня, то событие D можно считать невозможным.

**Задача 2.** Вы купили в магазине телевизор, на который фирма - производитель дает два года гарантию. Какие из следующих событий невозможные, случайные, достоверные:

A: телевизор не сломается в течение года.

B: телевизор не сломается в течение двух лет.

C: в течение двух лет вам не придется платить за ремонт телевизора.

D: телевизор сломается на третий год.

**Ответ.** События A, В , D – случайные, событие С – достоверное.

**Задача 3.** В коробке лежат 10 красных, 1 зеленая и 2 синих ручки. Из коробки наугад вынимают 2 предмета. Какие из следующих событий невозможные, случайные, достоверные:

A: будут вынуты 2- красные ручки.

B: будут вынуты 2- зеленые ручки.

C: будут вынуты 2 -синих ручки.

D: будут вынуты 2- разноцветных ручки.

E: будут вынуты 2 ручки.

F: будут вынуты 2 карандаша.

**Ответ.** События A, С , D – случайные, события B, F – невозможные, событие Е – достоверное.

**Задача 4.** Винни Пух, Пятачок и все – все – все садятся за круглый стол праздновать день рождения. При каком количестве " всех – всех – всех" событие

А: Винни и Пятачок будут сидеть рядом - является достоверным событием.

**Ответ.** Если " всех – всех – всех" всего 1, т. е. За столом собрались всего три лица, то событие А – достоверное, если больше 1, то А – случайное событие.

**Задача 5.** В школе учится N учеников. При какихN событие

А: в школе есть ученики с совпадающими днями рождения является случайным, а при каких – достоверным? Выясните, произошло ли это событие в вашей школе. А в вашем классе?

**Ответ.** При N366 событие А – случайное, при N>366 событие А – достоверное.

**Задача 6.** Среди 100 билетов школьной благотворительной лотереи 20 выигрышных. Сколько билетов вам надо купить, чтобы событие

А: вы ничего не выиграете – было невозможным?

**Ответ.** 81 билет.

**Задача 7.** В шкафу 10 пар ботинок с 36–го по 45-й размеры – по одной паре каждого размера. Какое минимальное количество ботинок надо наугад вынуть из шкафа, чтобы событие А: из вынутых ботинок можно составить хотя бы одну пару – было достоверным?

**Ответ.** 11 ботинок.

**Задача 8.** В классе учатся 10 мальчиков и 20 девочек. Какие из следующих событий для такого класса является невозможными, случайными, достоверными?

A: есть два человека, родившихся в разных месяцах.

B: есть два человека, родившихся в одном месяце.

C: есть два мальчика, родившихся в одном месяце.

D: есть две девочки, родившихся в одном месяце.

E: все мальчики родились в разных месяцах.

F: все девочки родились в разных месяцах.

G: есть мальчик и девочка, родившиеся в одном месяце.

H: есть мальчик и девочка, родившиеся в разных месяцах.

**Ответ.** События A,C,E,G,H –случайные, B, D – достоверные, F – невозможное.

**Задача 9.** Автобусу, в котором едет 15 пассажиров, предстоит сделать 10 остановок. Какие из следующих событий для такого класса является невозможными, случайными, достоверными?

A: все пассажиры выйдут на разных остановках.

B: все пассажиры выйдут на одной остановке.

C: на каждой остановке хоть кто – то выйдет.

D: найдется остановка, на которой никто не выйдет.

E: на всех остановках выйдет четное число пассажиров.

F: на всех остановках выйдет нечетное число пассажиров.

**Ответ.** События A,C,E – случайные, A,E,F – невозможные.

**Задача 10.** На модели координатной прямой в точке 0 стоит фишка. После каждого бросания монеты она сдвигается на единицу вправо, если выпал "орел", и на единицу влево, если выпала "решка". Какие из следующих событий для такого класса является невозможными, случайными, достоверными?

A: после четырех бросаний фишка находится в точке 0.

B: после трех бросаний фишка находится в точке 2.

C: после пяти бросаний фишка находится в точке 5.

D: после пятидесяти бросаний фишка находится в точке 25.

E: после пятидесяти бросаний фишка находится в точке 26.

**Ответ.** События A,C,E – случайные, B,D– невозможные.

**Задача 11.** На остановке останавливаются 3 автобуса: № 1,2 и 3. Интервал движения каждого автобуса колеблется от 8 до 10 минут. Когда Саша, Маша, Гриша и Наташа подошли к остановке, от нее отошел автобус №3, а еще через 6 минут автобус №1. После этого каждый из ребят высказал свое мнение о том, каким будет следующий автобус.

Саша: "следующим обязательно будет №2".

Маша: "возможно, что следующим будет №2".

Гриша: "возможно, что следующим будет №3".

Наташа: "невозможно, что следующим будет №1".

С кем из ребят вы согласны, а с кем нет? Объясните сделанный выбор.

**Ответ.** Не прав только Саша.

**2.2 Дискретность пространств элементарных событий**

В начале курса вводятся следующие понятия:

испытание – любой эксперимент, наблюдение, контрольные и проверочные действия, различные соревнования, обследования и т.п.;

единичное испытание – испытание, в котором совершается одно действие с одним предметом. Например, один раз подбрасывается монета или извлекается один шар из урны и т.д.;

исходы испытаний – результаты испытания. Например, при подбрасывании монеты выпал «орел» или из урны извлекли черный шар;

случайные исходы испытания - результаты испытания, которые нельзя заранее предсказать, поскольку они могут быть разными и определяются случайным стечением обстоятельств в ходе испытания;

множество исходов испытания – множество всех возможных случайных исходов испытания;

примеры и задачи, используемые в курсе, касаются испытаний с небольшим числом случайных исходов. Множество исходов таких испытаний можно определить простым перебором или построить с помощью таблиц и деревьев исходов, которые рассматриваются ниже.

На начальном этапе школьники должны научится определять множество исходов единичных испытаний.

**Пример 1.** Из урны, где лежат красный желтый и зеленый шары, наугад извлекли один шар. Запишите множество исходов испытания.

Решение. В испытании три исхода:

- извлечен красный шар (К),

- извлечен желтый шар (Ж),

- извлечен зеленый шар (З).

Исходы можно нумеровать произвольным образом, т.ве. Возможны и другие решения, например:  - Ж, - К, - З.

Исходы испытания благоприятствуют наступлению случайных событий. Понятие случайного события и благоприятствующих ему исходов вводятся через графическое изображение событий.

**Пример 2.** Подбрасывают игральный кубик. Изобразите графически событие А – выпало нечетное число очков.

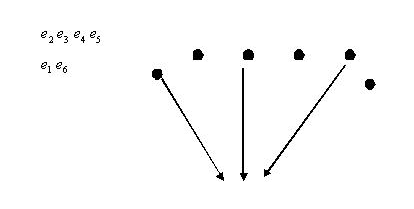


Рис. 1.

На рис.1 точки изображают исходы испытания:

 - выпало одно очко,

 - выпало два очка,

 - выпало три очка,

 - выпало четыре очка,

 - выпало пять очков,

- выпало шесть очков.

Исходы , ,  благоприятствуют событию А, и от них проведены стрелки к точке, изображающей это событие.

Для одного и того же испытания можно задать разные множества исходов. Например, если принять за событие А – выпадение нечетного числа очков при подбрасывании игрального кубика, а за событие В – выпадение четного числа очков, то грани с нечетным числом очков 1,3 и 5 становятся неразличимыми, так же как не различаются грани с четным числом очков 2,4 и 6. Отказ от различимости граней приводит к сокращению числа исходов при подбрасывании игрального кубика с шести до двух: е11 - А, е21 – В.

За исходы испытания можно принять и изображенные на рис.2 события С,D и K. Тогда число исходов при подбрасывании кубика будет равно трем.

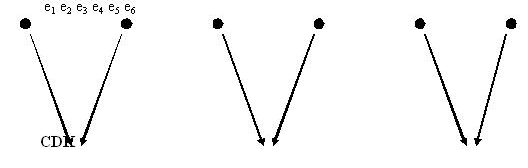


Рис. 2.

Очевидно, что существует множество других вариантов задания исходов при подбрасывании кубика. Множество исходов испытания, которое содержит максимальное число возможных исходов, называется *базовым множеством*, а все остальные множества исходов, полученные из базового путем объединения его исходов, - *сокращенным*. При подбрасывании игрального кубика базовое множество насчитывает шесть элементов (е1 ,е2 ,е3 ,е4 ,е5 ,е6 ), а сокращенные множества могут содержать от двух до пяти элементов.

Понятие базового и сокращенного множества исходов удобны при рассмотрении урновых испытаний. Пусть, например, из урны с тремя белыми и четырьмя черными шарами наугад извлекают шар.

Если бы все семь шаров были бы пронумерованы, т.е. различимы, то можно было бы говорить о базовом множестве исходов этого испытания, насчитывающем семь элементов. Но шары одного и того же цвета неразличимы. Поэтому в таком испытании задается сокращенное множество исходов: е1 – Б(достали белый шар),е2 – Ч(достали черный шар). Указанные исходы, по сути, являются событиями. Первому событию благоприятствуют три исхода из базового множества, связанные с извлечением белых шаров, а второму – четыре исхода из базового множества, связанные с извлечением черных шаров.

С помощью графических изображений удобно объяснять совместность и несовместность событий, а также их противоположность. Если в ходе испытания совместное осуществление событий А и В невозможно, то события А и В называются *несовместными.* В этом случае ни один из исходов испытания не благоприятствует одновременному появлению события А и события В. Если же в ходе испытания не благоприятствует одновременному появлению событий А и В возможно, то события А и В называются *совместными,* и, по крайней мере, один из исходов испытания благоприятствует одновременному появлению этих двух событий [24].

**Пример 3.** Укажите, какие из изображенных на рис.3 событий являются совместными, а какие – несовместными.

*Решение.* События А и В – совместные (общий исход е3), А и С – совместные (общий исход е1 и е3 **),** В иС – несовместные ( нетобщих исходов).

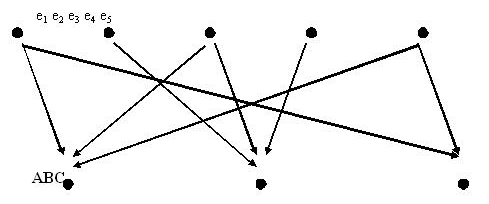


Рис. 3.

Если события А и В несовместные, и при любом исходе испытания наступает одно из этих событий, то события А и В называются *противоположными* и обозначаются как А= , B=.

**Пример 4.** Из урны, где лежат шесть пронумерованных подряд шаров с номерами с 1 по 6, наугад извлекают один шар. Изобразите графически события: А – извлекли шар с номером, кратным трем,  - событие, противоположное А. *Решение.* Базовое множество содержит шесть элементов (рис. 4): е1– извлечен шар № 1, е2 – извлечен шар № 2,

е3 – извлечен шар № 3, е4– извлечен шар № 4

е5 – извлечен шар № 5, е6– извлечен шар №6.

Появлению события А благоприятствуют два исхода – е3, е6 , остальные благоприятствуют .

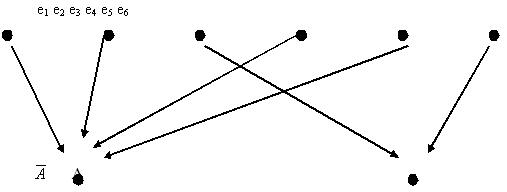


Рис. 4.

**2.3 Классическое и статистическое определение вероятности**

В рассматриваемом курсе для испытаний со счетным числом исходов можно использовать к*лассическое и статистическое* определение вероятности. Однако трудно не согласиться с венгерским математиком А. Реньи, отметившим, что классическое определение вероятности не является определением, а дает лишь метод ее вычисления в простейших случаях. Поэтому в предлагаемом курсе, сначала вводится статистическое определение вероятности, а затем для случаев, когда есть симметрия исходов испытаний, дается ее классическая формула.

В основе статистического определения вероятности лежит закон больших чисел, который в настоящем курсе приводится как факт, подтвержденный многочисленными опытами и наблюдениями. При введении статистического определения вероятности рекомендуется провести лабораторную работу, состоящую в подбрасывании монеты или игрального кубика. В ходе этой лабораторной работы школьники самостоятельно могут убедится в действии этого закона: с увеличением числа подбрасываний значение статистической частоты выбранного для наблюдения исхода (например, выпадение «орла» на монете, или четырех очков на кубике) устойчиво сосредотачиваются возле некоторого числа p, которое и называется вероятностью наблюдаемого исхода или события.

Внимание учащихся следует обратить на то, что на практике статистические испытания и наблюдения являются основным способом оценки вероятностей событий. При этом всегда возникает вопрос о точности такой оценки, поскольку не всегда возможно проведения достаточно большого числа экспериментов и наблюдений. В случае симметрии исходов испытания (подбрасывания симметричной монеты и игрального кубика, урновые испытания) вероятности исходов полагают равными друг другу. Тогда вероятность любого события А равна , где m – число всех исходов испытания, l - число исходов, благоприятствующих появлению события А.

Статистическое определение вероятности удобно для введения аксиом.

1. Вероятность исходов испытаний положительна.
2. Сумма вероятностей всех исходов испытания равна единице e1,e2,...,emp1+p2+...+p3=1. (1)
3. Вероятность случайного события равна сумме вероятностей исходов испытания, благоприятствующих этому событию, т.е. если е1,...,ек – множество всех исходов испытания, благоприятствующих появлению события А, то

P(A)=p1+...+pk. (2)

В качестве оснований для этих утверждений приводятся очевидные факты, связанные со статистическими испытаниями.

1. Статистическая частота исхода испытания положительна.
2. Сумма статистических частот всех исходов испытания в серии из N повторных экспериментов равна единице:



Здесь n1,n2,...,nm – число появлений исходов e1,e2,...,em в проведенной серии испытаний.

1. Статистическая частота случайного события равна сумме статистических частот исходов испытания, благоприятствующих этому событию.

Для закрепления материала необходимо рассмотреть решения следующих типов задач.

**Пример 1.** В некотором испытании возможны три исхода e1,e2,е3. Вероятность исхода е1 равна 0,3, а исхода е3 – 0,6. Чему равна вероятность появления исхода е2?

*Решение.*p2=1-p1-p3=1-0,3-0,6=0,1.

**Пример 2.** В некотором испытании возможны три исхода e1,e2,е3. В 1000 повторных испытаниях исход е1 появляется 350 раз, а исход е2 – в 40% испытаний. Оцените вероятность исходов испытания.

*Решение.*;

;

p3 1-0,35-0,4=0,25.

**Пример 3.** В испытании возможны четыре исхода: e1,e2,е3,е4. Их вероятности соответственно равны p1=0,2, p2=0,1, p3=0,4 и p4=0,3. Событию А благоприятствуют исходы e1 и е4, а событию В – исходы e2,е3 ие4. Чему равна вероятность событий А и В и вероятность, что события А и В произойдут в испытании вместе?

*Решение.* P(A)= p1+ p4=0,2+0,3=0,5;

P(B)= p2+ p3+ p4= 0,1+0,4+0,3=0,8;

P(A,B)= p4=0,3.

**Пример 4.** Чему равна вероятность извлечь наугад белый шар из урны, в которой лежат четыре белых и пять черных шаров?

*Решение.* Пусть событие А – извлечение белого шара. Тогда число всех исходов испытания m=9, число исходов испытания, благоприятствующих появлению события А, равно 4 (l=4) и P(A)=

В курсе также рекомендуется рассказать школьникам о так называемом персоналитическом методе оценки вероятности, когда эксперты исходя из своей интуиции, дают личную оценку вероятности событий. Примерами таких оценок являются вероятностные прогнозы исходов соревнований, публикуемые в спортивных изданиях.

Такие прогнозы, как правило, не поддаются проверке, поскольку, например, невозможно провести большое число футбольных матчей между двумя командами в одинаковых условиях.

Обобщая все вышеизложенное, можно сказать, что в начале курса учащиеся должны:

1) познакомится с понятиями случайных исходов испытаний, научится определять множество исходов единичных испытаний и исходы, благоприятствующие наступлению конкретных случайных событий;

2) познакомится с понятиями статистической частоты и вероятности, с методом оценки вероятности через статистические испытания;

3) научится вычислять вероятности исходов и событий по формулам (1) и (2).

Далее изучаются серии из двух единичных испытаний: два подбрасывания монеты, последовательное извлечение двух шаров из урны, два выстрела по мишени и т.д. В рассматриваемом курсе серии испытаний называются совместимыми испытаниями, а их результаты – исходами совместных испытаний. Совместные испытания разделяются на*независимые и зависимые*. Эти понятия вводятся на простых примерах урновых испытаний с возвращением и без возвращения шара в урну.

В урне три шара с номерами 1,2 и 3. Из урны последовательно извлекают два шара. Эти испытания можно проводить двумя способами.

Ι способ: извлекают первый шар (первое испытание), записывают его номер, шар кладут обратно в урну. Затем шары перемешивают в урне и извлекают второй шар (второе испытание). В этом случае результаты испытаний никак не влияют друг на друга, и такие испытания *называются независимыми.*

ΙΙ способ: извлекают первый шар, но в урну его не возвращают, а сразу за ним извлекают второй шар. В этом случае исходы второго испытания зависят от того, какой исход имел место в первом испытании. Если, например, в первом испытании извлекли шар №2, то во втором испытании этот шар появится уже не может. Такие испытания называются *зависимыми.*

Зависимость испытаний друг от друга приводит к зависимости исходов и событий, которые могут произойти в этих испытаниях.

Если проводятся два независимых друг от друга испытания, и в первом испытании возможно наступление события А, а во втором – события В, то события А и В – независимые. В этом случае для них справедлива теорема умножения вероятностей:

P(A,B)=P(A)\*P(B). (3)

Для примера снова обратимся к урновым испытаниям, описанным выше, с возвращением шара в урну.

Пусть событие А – первым достали шар №1.Это событие связано с первым испытанием и его вероятность равна 

Пусть событие В – вторым достали шар №2. Это событие связано со вторым испытанием и его вероятность также равна 

Первое и второе испытания независимые, поэтому события А и В – независимые, и вероятность, что они произойдут вместе, согласно формуле (3), равна 

Если же проводятся зависимые испытания, и второе испытания зависит от первого испытания, то событие В зависит от события А. В этом случае для события В вводится условная вероятность  и теорема умножения вероятностей принимает вид:

P(A,B)=P(A)\*  (4)

Таким образом, в урновых испытаниях без возвращения шара в урну событие В(вторым достали шар №2) зависит от события А(первым достали шар №1), а вероятность  рассчитывается по формуле (4).

Формулы (3) и (4) позволяют вычислять вероятности исходов совместных испытаний. Эти исходы представляют собой возможные комбинации исходов единичных испытаний, записанные в определенном порядке.

Вероятность любого события, которое может произойти в совместных испытаниях, равна сумме вероятностей всех комбинаций, которые благоприятствуют этому событию. А это означает, что вероятностные задачи на совместные испытания можно сводить к построению множества исходов этих испытаний и вычислению вероятностей исходов по формулам (3) и (4). Если все исходы испытаний и их вероятности известны, то найти вероятность интересующего события не составляет труда. В настоящем курсе учащиеся учатся определять множество исходов совместных испытаний, строя таблицы исходов и вероятностные графы.

Таблицы исходов строятся для независимых испытаний.

**Пример 5.** Два стрелка независимо друг от друга делают по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадения для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,8. Чему равна вероятность поражения мишени?

*Решение.* Пусть событие А – мишень поражена, а исход П – попадание в мишень, исход М – промах. Тогда множество исходов двух совместных испытаний (выстрел по мишени каждым из стрелков) содержит четыре элемента (рис.5).

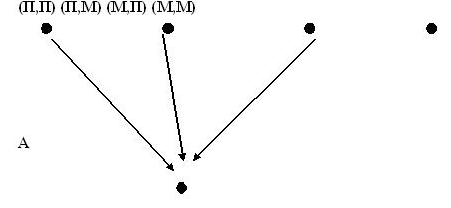


Рис. 5.

Составим таблицу исходов этих испытаний.

В первый столбец таблицы записаны исходы выстрела первого стрелка, а в первую строку – исходы выстрела второго стрелка. Остальные клетки таблицы заполняются комбинациями исходов единичных выстрелов. Вероятность этих комбинаций (исходов совместных испытаний) подсчитывается по формуле (3). Затем определяются, какие комбинации благоприятствуют событию А, и складываются вероятности этих комбинаций:

Р(А)=р(П,М)+р(М,П)+р(П,П)=0,14+0,24+0,56=0,94.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 2  1 | П  (0,8) | П  (0,2) |
| П  (0,7) | П, П  (0,7\*0,8=0,56) | П, М  (0,7\*0,2=0,14) |
| М  (0,3) | М, П  (0,24) | М, М  (0,06) |

Задачи на зависимые совместные испытания решаются построением вероятностных графов.

**Пример 6.** Из урны, где лежат три белых и четыре черных шара, наугад без возвращения один за другим извлекают два шара. Какова вероятность того, что извлекут разноцветные шары?

*Решение.* Пусть событие А – извлечение разноцветных шаров, исход Ч – извлечение черного шара, Б – извлечение белого шара.

 В урне 7 шаров. (Ч,Ч)

Извлекают (Ч,Б) **А**

Ч Б первый шар.

 В урне 6 шаров. (Б,Ч)

Извлекают второй шар. (Б,Б)

**Ч Б Ч Б**

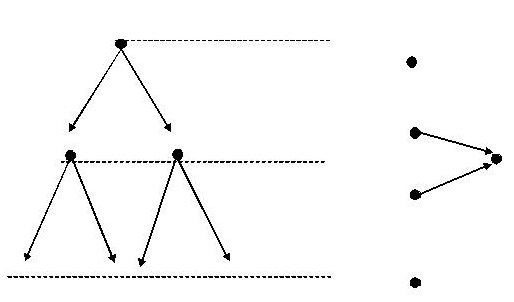


Рис. 6.

Р(А)=

Поясним приведенное решение. Стрелки вероятностного графа (рис.6) изображают возможные исходы испытаний, обозначения которых ставятся возле концов стрелок. В нашем случае – это буквы Ч и Б. Рядом со стрелками записываются соответствующие безусловные или условные вероятности. Каждая цепочка стрелок изображает один из исходов совместных испытаний – одну из возможных комбинаций извлечения из урны шаров: (Ч,Ч), (Ч,Б), (Б,Ч), (Б,Ч). По формуле (4) вероятности этих комбинаций получаются перемножением безусловных и условных вероятностей, записанных вдоль цепочек. Извлечению разноцветных шаров благоприятствуют исходы (Ч,Б) и (Б,Ч). сложив их вероятности, найдем искомую вероятность Р(А).

Построением таблиц и вероятностных графов можно решать и более сложные задачи, когда проводятся три, четыре и даже пять совместных испытаний. Например, до пяти раз подбрасывают монету или из урны без возвращения извлекают три шара. Уровень таких задач достаточно высок для средней школы, и учащиеся, овладевшие алгоритмами построения таблиц и графов, успешно с ним справляются [24].

Школьникам предлагается также решать обратные задачи о нахождении вероятностей гипотез по предварительно заданной информации. Вероятность гипотезы вводится расширением понятия условной вероятности.

Напомним, что условная вероятность была введена для зависимых событий при рассмотрении совместных зависимых событий. Однако при проведении любых испытаний можно сделать предположение (выдвинуть гипотезу) о возможности наступления любого конкретного события А, если заранее известно, что в этих испытаниях наступило (или, наступит), например событие В. Тогда вероятность, что это предположение оправдается (вероятность гипотезы), есть условная вероятность , вычисляемая по формуле

=

В заключение хочется подчеркнуть, что учащимся 5 – 9 классов вполне по силам изучение элементов теории вероятностей на примерах простых испытаний с небольшим числом исходов. Математический аппарат, которым они должны предварительно овладеть – школьный курс арифметики. А предлагаемая аксиоматика, алгоритмы построения таблиц исходов испытаний и вероятностных графов доступны для школьного понимания.

**2.4 Алгебра событий**

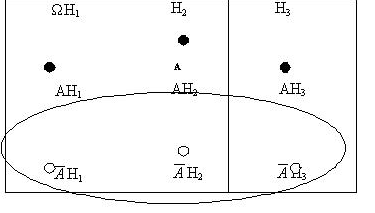
После того как учащиеся познакомятся с элементарными понятиями теории вероятностей: события, достоверные и невозможные события, противоположное событие, несовместные события, независимые события – и научатся вычислять вероятность события на основе классического определения вероятности, полезно потренировать школьников в употреблении терминов, относящихся так называемой алгебре событий. При этом имеет смысл установить связь между алгеброй событий и алгеброй множеств. Понятие множеств учащимся интуитивно ясно. Не вызывает трудности и тренировка в операциях над множествами: включение, объединение, пересечение, дополнение. Представления об этих операциях лежат в основе всей математики и, в частности, в основе теории вероятностей. Достаточно посвятить им одно - два занятия, и учащиеся уже хорошо ориентируются в операциями над множествами. Теоретико-множественные представления можно призвать на помощь при обучении языку алгебры событий [23].

Для того чтобы установить параллель между языком теории множеств и языком алгебры событий, полезно составить вместе с учащимися таблицу, которая приведена ниже.

С помощью таблицы и рисунка целесообразно разобрать с учащимися задания по тематике, описывающей ряд однотипных испытаний. Но сначала необходимо ввести обозначения, которыми будем пользоваться в дальнейшем. Представим себе три одинаковые урны, в каждой из которых лежат неразличимые на ощупь белые и черные шары.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Обозначения | Интерпретация  Теории множеств Теории вероятностей | |
| Ω | Элемент, точка | Исход, элементарное событие |
|  | Универсальное множество, т.е. множество всех рассматриваемых точек | Достоверное событие исходов, т.е. множество всех элементарных событий |
| Ø | Пустое множество | Невозможное событие |
| A,B | Подмножество универсального множества | Случайное событие |
| A=B | Подмножества А и В равные | События А и В равносильные |
| AB | Объединение множеств А и В, т.е. множество точек, входящих или в А, или и В | Событие, состоящее в том, что произошло А или В |
| A+B | Сумма множеств, т.е. объединение непересекающихся множеств | Событие, состоящее в том, что произошло одно из несовместных событий либо А, либо В |
| AB;AB | Пересечение множеств А и В, т.е. множество точек, входящих и в А, и в В | Событие, состоящее в том, что одновременно произошли события А и В |
| AB= Ø | Множество А и В не пересекаются | События А и В несовместны( не могут наступать одновременно) |
| A\B | Разность множеств А и В, т.е. множество точек, входящих в А, но не входящих в В | Событие, состоящее в том, что произошло А, но не произошло В |
| A∆B | A∆B=(A\B)(В\А) | Событие, состоящее в том, что произошло одно из событий А или В, но не оба одновременно |

Рассматриваются такие события (гипотезы):



H1 - выбрали первую урну,

H2 - выбрали вторую урну, A - вынули из урны белый шар,

H3 – выбрали третью урну,  - вынули из урны черный шар

**Задача 1.** Запишите с помощью символов следующие события.

1. выбрали либо первую, либо вторую урну;
2. выбрали какую – то одну урну;
3. выбрали не первую урну;
4. белый шар вынули из второй урны;
5. черный шар вынули из третей урны;
6. белый шар вынули не из первой урны;
7. из какой – то урны выбрали черный шар.

*Ответ.* 1) H1+H2;

2) H1+H2+H3;

3)= H2+H3;

4) A H2;

5) ;

6) A =A(H2+ H3);

7) ( H1+H2+H3).

**Задача 2.** Дайте словесное толкование следующим событиям:

1. а) AH1; б) H2; в) .

2. а) AH1+AH2+AH3; б) H1+H2+H3.

3. а) (A\H1) (H1\A); б)(\H2) (H2\).

*Ответ.*1. а) Белый шар вынули из первой урны;

б) черный шар вынули из второй урны;

в) черный шар вынули не из третьей урны

2. а) Белый шар вынули либо из первой, либо из второй, либо из третьей урны;

б) черный шар вынули либо из первой, либо из второй, либо из третьей урны;

3. а) Либо вынули белый шар не из первой урны, либо из первой урны вынули черный шар;

б) либо вынули черный шар не из второй урны, либо из второй извлекли белый шар.

**Задача 3.**установите, верны ли равенства:

а) H1+H2+H3=Ω;

б) А+ =Ω;

в) А= Ø – и дайте им словесное толкование.

*Ответ.* Все равенства верны.

а) выбрали либо первую, либо вторую, либо третью урну. По условию испытания это событие достоверное;

б) достоверное, что вынули либо черный, либо белый шар;

в) вынутый шар не может быть одновременно и белым и черным.

На этом этапе, когда язык алгебры событий учащимися достаточно усвоен, вводятся теоремы сложения и умножения вероятностей, после которых следуют приведенные ниже упражнения.

**Задача 4.** Известно, что в каждой из трех урн число белых шаров равно числу черных (например, см. рисунок). Подсчитайте указанные ниже вероятности при условии, что шар извлекается наугад из наугад выбранной урны.

1. P(H1), P(H2), P(H3).
2. P(H1+H2+H3).
3. P(A), P().
4. P(AH3),P(H1).

*Ответ.* 1. P(H1)= P(H2)= P(H3)= - вероятность того, что выбрана первая (вторая, третья) урна.

2. P(H1+H2+H3)= +==1 – вероятность того, что выбрана одна из урн, равна вероятности достоверного события, т.е. 1.

3.P(A)= P()= - вероятность того, что будет вынут белый (черный) шар.

4. P(AH3)=P(H1)= \*= вероятность того, что будет извлечен белый шар из третьей урны (черный шар из первой урны).

Следующий этап - изучение условной вероятности, т.е. вероятности события А, если известно, что оно может наступить, если прежде произошло одно из событий H1,H2,H3.

В этом месте также необходимо потренироваться в правильном употреблении терминов и символов.

**Задача 5.** Запишите словами, в чем состоят указанные ниже события, и вычислите их вероятность.

а) A\H1; б) \H2; в) \.

*Ответ. а*) выбрали первую урну, а затем из нее извлекли белый шар,

P(A\H1)=

б) выбрали вторую урну, а затем из нее вынули черный шар,

P(\H2)=;

в) выбрали первую либо вторую урну, а затем из какой –то из них достали черный шар,

P(\)=

Изучив понятие условной вероятности, есть возможность перейти к формуле полной вероятности.

Вероятность события А, которое может наступить при условии появления одного из несовместных событий (гипотез) H1,H2,H3, образующих полную систему событий, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события А:

Р(А)=P(H1)P(A\H1)+P(H2)P(А\H2)+P(H3)P(А\H3) – формула полной вероятности. Рассмотренная проблематика позволяет связать ее с более сложным вопросом, к которому обычно приступают много позже. Речь идет о формуле Байеса. Объединяя изучения формулы полной вероятности и формулы Байеса, преподаватель достигает настоящего укрупнения дидактических единиц и получает возможность лучше разъяснить ситуации, связанные с обеими формулами. В самом деле, формула полной вероятности употребляется для подсчета вероятности предложения о том, что событие А может наступить, а формула Байеса применяется тогда, когда событие А наступило.

Пусть известно, что:

а) событие А может наступить при условии появления одного из событий H1,H2,H3, образующих полную систему событий;

б) известны условные вероятности P(A\H1), P(А\H2), P(А\H3) события А относительно всех событий Н1,Н2,Н3.

В результате испытание оказалось, что событие А произошло. Какова вероятность того, что оно наступило вместе с событием Нi, где I=1,2,3. другими словами, найти вероятность P(H1\A), P(H2\ А), P(H3\ А).

Эту задачу решает формула Байеса:

P(H1\A)=,

где I=1,2,3.

Итак, показанная линия изучения основ теории вероятностей на базе средней школы, на этой теме завершается. Материал параграфов 1,2,3 может быть рассмотрен в классе со всеми учащимися, а 4 параграф при более углубленном изучении – на кружке или факультативе.

**Глава III Факультативный курс «Элементы теории вероятностей» для 10 – 11 классов**

**3.1 Внеклассная работа по математике, факультативные занятия**

Требования, которые предъявляются программой по математике, сложившимися методами обучения, обращены ко всем учащимся. Но как бы хорошо не был проведен урок, мы находимся в строго ограниченных временных рамках. Внеклассная работа ставит цели: углубить и расширить математические знания, дать учащимся возможность оценить и развить свои способности, удовлетворить любознательность; усовершенствовать умения и навыки в решении задач; научить работать с литературой; творчески использовать свободное время; определять перспективы дальнейшей деятельности, жизни, учебы и работы.

Внеклассная работа – это добровольные необязательные, систематические занятия с учащимися во внеурочное время.

***Внеклассная работа для слабого ученика*** выполняет роль индивидуальных дополнительных занятий. Они ликвидируют пробелы у учащихся, их цель вывести на уровень ОРО. Собирают маленькие группы (3-4 человека). Проводят не чаще одного раза в неделю, сочетая с домашним заданиями. На классных занятиях и к домашним заданиям прилагать карточки по образцу. После обработки вопросов используют контроль. Обязательно использовать линию успеха (хвалить, поощрять, не ругать).

***Внеклассная работа с сильными учениками,***которые имеют повышенный интерес к математике.

Цели:

1. пробуждение и развитие устойчивого интереса;
2. расширение и углубление знаний по программному материалу;
3. оптимальное развитие математических способностей и привитие учащимся определенных навыков научно-исследовательского характера;
4. воспитание высокой культуры математического мышления;
5. развитие у учащихся умений самостоятельно и творчески работать с учебной литературой, компьютером;
6. расширение и углубление представлений учащихся о культурно-исторической ценности математики, о ее ведущей роли в мировой науке, о прикладной направленности математики;
7. создание актива, способного оказать учителю помощь;
8. установление более тесного делового контакта на основе глубокого изучения математики.

Темы внеклассной работы расширяют и углубляют учебный материал. Содержание внеклассной работы зависит от форм ее проведения: математические кружки, факультативы, викторины и конкурсы, математические вечера и олимпиады, математические школы (очные и заочные), внеклассное чтение, рефераты, доклады и сочинения.

***Факультативные занятия –***одна из самых распространенных внеклассной работы. История уходит в конец 19-го начало 20-го веков, создавались при гимназиях для успевающих учеников.

Цели:

1. углубление и расширение знаний по математике;
2. развитие интереса к предмету, развитие математических способностей у учеников;
3. привитие интереса и навыков к исследовательской самостоятельной деятельности;
4. развитие умения учащихся решать более сложные задачи;
5. подготовка к труду, который будет связан с математикой;
6. воспитание инициативы и развитие творчества.

Явное течение началось в 1966 году. Вышло постановление о мерах дальнейшего углубления работы в школе. В течение последних лет в системе проведения факультативных занятий происходили различные изменения и испытания. В 1975 году вышло новое постановление, которое касалось программ и учебных пособий. Программа привязана к учебным темам, определяется время проведения, количество учащихся и оплата.

Программа состоит из двух направлений:

1. дополнительные главы и вопросы курса математики;
2. изучение специального математического курса.

Выделяют два основных направления по содержанию и по целям:

1. факультатив 7-9 классов;
2. факультатив 10-11 классов.

В 10-11 классе подготовительный курс. Цель: подготовить учащихся к продолжению образования и повышения уровня математической культуры. Преподавание строится как углубленное изучение вопросов основного курса. Углубление реализуется на базе обучения методам и приемам решения математических задач, требующих логической и операционной культуры. Особое место занимают задачи, требующие применения нестандартных знаний. Это целенаправленная подготовка к выпускным школьным и вступительным вузовским экзаменам. Программа построена на основании линии алгебры и начала анализа, геометрии, теории вероятностей и математической статистики. В данной главе мы рассматриваем методику преподавания факультативных занятий по теме «Элементы теории вероятностей» для 10-11 классов средней школы. Эта методика включает в себя разработку системы уроков по данной теме. Предлагаемая система представляет собой такие формы организации обучения как урок-лекция, уроки-практикумы, урок-семинар, урок-консультация и уорк-игра, которые мы считаем наиболее эффективными при проведении данного факультативного курса по теории вероятностей.

Поурочное планирование факультативного курса по теме «Элементы теории вероятностей» для 10-11 классов

|  |  |
| --- | --- |
| Количество Уроков | Содержание учебного материала |
| 1 | Случайные события.  Урок-лекция |
| 2 | Классическое определение вероятности.  Лабораторная работа  Практическая работа |
| 1 | Геометрическая вероятность.  Урок-семинар |
| 1 | Основы теории вероятностей.  Урок-консультация |
| 1 | Урок-игра «Восхождение на пик знаний» |
| Всего 6 уроков | |

Апробация ниже предложенного факультативного курса «Элементы теории вероятностей» была проведена в школе № 43 ст. НоводеревянковскойКаневского района среди учащихся 10 класса (10 человек), посещающих факультативные занятия. Возраст детей составлял 14-16лет. На уроках широко применялись наглядность, различные формы беседы, дискуссии, опыты, работа с карточками.

Хорошо была организована и самостоятельная работа учащихся. Для этого использовались следующие приемы: краткий конспект лекций, работа с книгой, подготовка докладов и рефератов, работа с карточками, групповая форма работы.

В свою очередь обучаемые показали высокий уровень заинтересованности, а новизна содержания учебного материала помогла развить уже имеющийся познавательный интерес учащихся к математике в процессе изучения основ теории вероятностей.

На каждом уроке осуществлялась промежуточная проверка знаний и умений обучаемых: проводился контроль выполнения домашнего задания, фронтальный опрос по пройденному теоретическому материалу, организовывалась работа учащихся у доски.

Вывод: таким образом обобщенный и систематизированный методический материал и разработанный факультативный курс способствуют достаточно успешному преподаванию теории вероятностей в общеобразовательной школе.

**3.2 Случайные события. Урок – лекция**

Как показывает опыт преподавания применения лекционно-зачетной системы при изучении ряда тем курса математики позволяет учителю излагать учебный материал крупными порциями и на этой основе высвободить время для повторения, обобщения и систематизации теории и решения задач.

Кроме того, такая организация занятий обеспечивает усиление практической и прикладной направленности преподавания и приобщение учащихся к активной работе с учебной литературой, повышения уровня их подготовки. Применительно к процессу обучения математики возможна следующая структура лекционно-зачетной системы: уроки-лекции, уроки-семинары, уроки-практикумы, уроки-консультации, урок-зачет.

Уроки-лекции: как правило, это уроки, на котором излагается значительная часть теоретического материала данной темы. В зависимости от дидактических задач и логики учебного материала распространены вводные, установочные, текущие и обзорные лекции. По характеру изложения и деятельности учащихся лекция может быть информационной, объяснительной, лекцией-беседой и т.д.

Лекционная форма проведения урока целесообразна в следующих случаях:

1. тема является мало связанной с ранее изученным материалом, то есть является практически новой для учащихся.
2. при подачи информации крупными блоками в плане реализации теории укрупнения дидактических единиц в обучении;
3. при рассмотрении сложного для самостоятельного изучения материала;
4. когда объем теоретического материала велик, а задач к нему недостаточно;
5. при выполнении определенного вида заданий по одному или нескольким разделам, темам;
6. для обобщения и систематизации знаний по данной теме, так и по темам, изучаемым в различных главах, классах, связанных общей идеей;
7. применение математического аппарата к решению прикладных задач.

Тип лекции, ее структура определяется темой и целью урока. Лекция строится на сочетании этапов урока: организации, постановки цели и актуализации базовых знаний, сообщение материала учителем и усвоение его учащимися, постановка домашнего задания. Одна из особенностей школьной лекции заключается в том, что учитель непрерывно следит за процессом усвоения материала непосредственно на уроке, организовывает диалог с учащимися, элементы первичного контроля и дает оценку усвоения учащимися содержания лекции, возможен вызов учащихся к доске - привлечение учащихся к объяснению отдельных этапов. Лекционная форма занятий требует от учителя четкой организации учебной деятельности школьников, привлечение их внимания к содержанию лекции. С целью интенсификации учебного процесса на уроках желательно использовать технические средства обучения, различные таблицы, образцы решений, схемы, таблицы, подручный материал.

В отличии от вузовской практики лекционных форм эта работа проходит при активной роли учащихся.

Во-первых, они не пассивно воспринимают повествование учителя, а разбирают вместе с ним излагаемый материал, могут задать вопрос, попросить повторить непонятное.

Во-вторых, учитель в случае необходимости может организовать самостоятельную работу учащихся, предоставляя им возможность разобрать тот или иной вопрос по учебнику.

В-третьих, провести первичный контроль с целью получения информации об усвоении.

**Урок-лекция**

*Тема урока:* Случайные события.

*Цель урока:*

1. познакомить учащихся с понятием случайного события;
2. развить интерес к теории вероятностей, математики;
3. способствовать развитию логического мышления, воображения.

*Оборудование:* доска, мел, монетка, кубик, набор задач.

*Структура урока.*

1. ***Организационный момент.***
2. ***Сообщение темы и цели занятия.***
3. ***Объяснение нового материала.***

*Учитель.* В теории вероятностей (как ив любой другой науке) жизнь изучается не во всей ее сложности, а только с одной определенной стороны. При этом строится некоторая схема (или модель), которая более или менее полно отражает интересующую нас сторону жизни.

Эта схема и изучается. Например, в геометрии изучаются свойства фигур: точек, прямых и т. п. В реальной жизни таких фигур нет.

Поэтому мы имеем дело с моделями, полученными, как результат моделирования, схематизирования, абстрагирования определенной стороны реальной жизни.

В физике рассматривается материальная точка, идеальный газ и т. п. Это тоже модельное представление определенных сторон реальной жизни — в природе материальных точек и идеального газа нет.

В теории вероятностей рассматривается следующая модель изучаемых явлений реальной жизни: делается опыт (испытание),в результате происходят случайные события(часто говорят просто — события).

Например, бросили монету и посмотрели, что выпало, — это опыт. В результате этого опыта может выпасть герб — это одно событие, а может выпасть цифра — это другое событие. Поскольку выпадение герба зависит от случая, то это случайное событие.

События принято обозначать большими латинскими или русскими буквами: *А, В, С* и т. п.

Например, в опыте с броском монеты событие «выпал герб» естественно обозначить буквой *Г.* При этом пишут: *Г =* «выпал герб». Аналогично событие «выпала цифра» обозначают буквой *Ц.*

Рассмотрим еще один опыт, несколько более богатый событиями, чем опыт с бросанием монеты, — бросание игральной кости. Этот опыт состоит в следующем. Игральную кость (кубик, на сторонах которого указаны точки: 1, 2, 3, 4, 5 и 6, соответствующие количеству очков) бросают на стол и смотрят (на верхней грани), сколько выпало очков. При этом могут произойти следующие события:

Q1= «выпало 1 очко», Q4 = «выпало 4 очка»,

Q2*=* «выпало 2 очка», Q5 = «выпало 5 очков»,

Q3= «выпало 3 очка», Q6 = «выпало 6 очков».

Но можно рассматривать и другие события, связанные с опытом бросания игральной кости:

Qnp-«число выпавших очков простое»,

Q3k-«число выпавших очков делится на 3»,

Qч - «число выпавших очков четно»,

Qн - «число выпавших очков нечетно» и другие.

Уже на этих простых опытах мы можем заметить, что события Qч и QH не могут произойти одновременно. Такую особую связь между событиями можно наблюдать в любом опыте, и она носит определенное название.

**Определение.**

Два события называются несовместными; если они в рассматриваемом опыте не могут произойти одновременно. События, которые в рассматриваемом опыте могут произойти одновременно, называются совместными.

Например, в опыте с броском игральной кости события Q4 и Qnp совместны. Действительно, пусть выпало 2 очка. Число 2 четное, следовательно, произошло событие Q4 . С другой стороны, число 2 простое, следовательно, произошло событие Qпр. Аналогично события Q3 и Qпр тоже совместны. Однако между совместностью пары событий Q3 иQпр и пары событий Qч и Qпр наблюдается существенная разница. Для первой пары из того, что произошло событие Q3, автоматически следует, что произошло и событие Qпр. Для второй же пары этого нет. В самом деле, предположим, что выпало 4 очка, т. е. произошло событие Qч . А событие Qпр при этом не произошло, так как 4 не является простым числом. Таким образом, для второй пары из того, что произошло одно из совместных событий, еще не следует, что автоматически произошло и другое.

Заметим еще одно существенно важное обстоятельство. В опыте с броском игральной кости события Q1 , Q2, ..., Q6 как бы играют особую роль для этого опыта. Сущность этой особой роли состоит в том, что в результате опыта одно из этих событий обязательно происходит, а любые два из них несовместны.

**Определение.** Множество событий рассматриваемого опыта, одно из которых в результате опыта обязательно происходит, а любые два из них несовместны, называется множеством элементарных событий (или исходов) этого опыта, а каждое событие из этого множества называется элементарным событием рассматриваемого опыта или его исходом.

Так, в опыте с броском игральной кости события Q1 , Q2, ..., Q6образуют множество исходов этого опыта. Подчеркнем, что для одного и того же опыта можно рассматривать разные множества исходов.

Например, для опыта с броском игральной кости можно рассматривать множество из двух исходов — Qч и Qн. В самом деле, эти события несовместны, ив результате опыта (броска игральной кости) одно из них обязательно происходит. От того, как выбрано множество элементарных событий опыта, зависит большая или меньшая сложность решения поставленной вероятностной задачи: при удачном выборе решение сильно упрощается, а при неудачном или усложняется, или вообще не может быть найдено.

Итак, мы познакомились со случайными событиями и простейшим» видами связей между ними.

1. ***Первичное закрепление и осмысление материала. Решение задач.***

Учитель: Разобранная нами схема а проведения опыта - частный случай, привычные вам задачи, в которых результат действий определен однозначно; однако в задачах по теории вероятностей возможны различные ответы на поставленные вопросы, где учитываются не только статистические закономерности, но и индивидуальные особенности разных людей, предметов.

***Задание 1.*** Сравните между собой на основе жизненного опыта общения по телефону шансы следующих случайных событий определите, какие из них наиболее вероятны.

A: вам никто не позвонит с 5 до 6 утра.

B: вам кто – нибудь позвонит с 5 до 6 утра.

C: вам кто – нибудь позвонит с 6 до 9 вечера.

D: вам никто не позвонит с 6 до 9 вечера.

*Решение.* Поскольку ранним утром звонки вообще бывают очень редко, у события B шансов крайне мало, оно маловероятное, почти невозможное. Но вот у события А очень много шансов, это практически достоверное событие.

Вечерние часы, наоборот, время самого активного телефонного общения, поэтому событие С для большинства людей вероятней, чем событие D. Хотя если человеку вообще звонят редко, событие D может оказаться вероятнее события С.

***Задание 2.*** В игре "Любовь с первого взгляда" трое юношей и три девушки случайно выбирают друг друга. Если выбор какого – нибудь юноши и девушки совпал, то образуется пара. Какие из следующих событий невозможные, случайные, достоверные: A: не образовалось ни одной пары.

B: образовалась одна пара.

C: образовалось две пары.

D: образовалось три пары.

***Ответ.***Все события случайные.

***Задание 3.*** Три господина, придя в ресторан, сдали в гардероб свои шляпы. Расходились по домам они уже в темноте и разобрали свои шляпы наугад. Какие из следующих событий невозможные, случайные, достоверные: A: каждый надел свою шляпу.

B: все надели чужие шляпы.

C: двое надели чужие шляпы, а один - свою.

D: двое надели свои шляпы, а один – чужую.

***Ответ.*** События A, В , С – случайные, событие D – невозможное.

**5. *Итоги урока. Вопросы для повторения:***

* 1. Какое событие называется случайным?
  2. Какие события называются достоверными, несовместными?
  3. Приведите примеры?

**6. *Постановка домашнего задания****.*

***Задание.***

Ученика поручается подбрасывать кубик несколько раз. Cтавятся следующие вопросы. Какие из следующих событий являются возможными (случайными), а какие достоверными:

1) кубик, упав, останется на ребре;

2) выпадет только одно из чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6 ;

1. выпадет число 6;
2. выпадет число 4;
3. выпадет четное число;
4. выпадет нечетное число;
5. выпадет число, которое делится на 5;
6. выпадет число, которое делится на 7;
7. выпадет число, которое делится на 3;

10) не выпадет никакое число.

**3.3 Классическое определение вероятности. Уроки-практикумы**

Основная цель этих уроков – усиление практической направленности обучения. Они должны быть тесно связанными с изученным материалом и способствовать прочному его усвоению. Основными формами их проведения являются практические и лабораторные занятия, на которых учащиеся самостоятельно упражняются в практическом применении усвоенных теоретических знаний и умений. На лабораторных работах формируются экспериментальные умения, а на практических - конструктивные. На этих уроках закрепляется и углубляется теоретический материал, изложенный в лекции, проводится целенаправленная работа по выработке у учащихся умений и навыков решения основных типов задач. В первую очередь обращается внимание на отработку навыков решения задач из учебника (простейших).

С учащимися обсуждаются подходы к решению опорных (ключевых) задач, их оформление. Образцы выполнения этих задач учащиеся записывают в свои рабочие тетради. К этим урокам подбираются упражнения, составленные по принципу внутрипредметных и межпредметных связей.

Они позволяют параллельно с изучением нового повторить общие подходы к решению задач из ранее изученного материала. Здесь успешно применяются групповые формы работы, используется помощь консультантов из числа успевающих учащихся этого класса. Учащимся, проявляющих повышенный интерес к математике, оказывается достаточно времени для более глубокого изучения вопросов теории. Для них подбираются специальные задания повышенной трудности. Таким образом на практических занятиях проводится дифференцированная работа с учащимися с учетом интересов как сильных учеников, так и более слабых из них.

На этих уроках могут быть использованы различные средства обучения: дидактический материал, таблицы, ТСО, что помогает тому, чтобы время урока расходовалось экономно, с максимальной отдачей учащихся.

Внешне эти уроки не всегда вписываются в традиционные схемы, могут со стороны казаться неинтересными, но они приносят большую пользу учащимся. Здесь идет кропотливая работа по усвоению знаний, овладению умений, ученики получают ответы на невыясненные вопросы, приобретают необходимые общеучебные навыки, усваивают алгоритмы решения задач, готовятся к зачету или контрольной работе.

Полезно планировать проведение на практических занятиях промежуточный контроль, который позволяет своевременно обнаружить пробелы в знаниях и принять меры по их ликвидации.

Очень важным при обучении математики является практикум по решению задач. Эти занятия можно построить таким образом: решение задач по изучаемой теме проводится в два этапа.

Первоначальный этап – это обучение поиску решения задач на основе подробного разбора опорных. Особое внимание при этом уделяется (чертежу)схеме, в процессе создание которой учащиеся осваивают особенности и связи объектов в условии. Так с подробным анализом и обоснованием каждого шага решаются 8-10 задач. Первый этап решения задач можно закончить зачетом.

Второй этап- решение более сложных задач, при этом значительно увеличивается роль самостоятельной работы учащихся, но и здесь учитель направляет пути поиска решения задачи. Завершить можно этот этап тоже зачетом, в который включены задачи уже разобранные, другие – новые, подобные разобранным.

На этих занятиях целенаправленна работа по закреплению умений и навыков.

**3.3.1 Лабораторная работа**

*Тема урока:* Классическая и статистическая вероятности.

*Цель урока:*

* 1. вывести формулу вероятности;
  2. развить творческую активность учащихся;
  3. воспитать самостоятельность, взаимопомощь.

*Оборудование:* доска, мел, карточки, набор монеток и канцелярских кнопок. *Структура урока.*

1. ***Организационный момент.***
2. ***Сообщение темы и цели занятия.***
3. ***Организация учащихся на проведение лабораторной работы.***

*Учитель.* Теория вероятностей – это математическая дисциплина, изучающая закономерности, происходящие в массовых случайных явлениях.

Многолетняя практика проведения статистических исследований показывает, что частота обладает свойством устойчивости: в различных сериях опытов она может быть неодинакова, но при увеличении числа самих опытов она, как правило, стабилизируется.

*1) Проведение опыта.* Перед изучением «Классического определения вероятности» мы проведем коллективный статистический опыт: одни учащиеся (группа по 2 человека) будут подбрасывать монету, другая половина класса, проведет испытание с канцелярской кнопкой (*учащимся раздается материал для проведения опыта-карточки для внесения результатов, монетки, кнопки*).

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Номер группы | Число испытаний | Герб | Цифра |
|  |  |  |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Номер группы | Число испытаний | Вверх | Вниз |
|  |  |  |  |

*2) Обобщение и систематизация полученных результатов.*

Проведя по десять испытаний каждым, объединим полученные сведения и вычислим частоту, соответствующие исходам.

Если опыт повторен n раз, то событие произойдет приблизительно *рп*раз. При этом, если событие произошло *т* раз, то частота появления события - число  и точность этого равенства будет тем больше, чем больше n. Иначе говоря, связь, которая существует между опытом и событием и характеризуется числом *р* — вероятностью события в рассматриваемом опыте, выявляется только при многократном повторении этого опыта.

По полученным в результате опыта данным вычислим частоту выпадения герба и цифры, частота выпадения кнопки острием вверх и вниз.

*Учитель.* Французский ученый Жорж Луи де Бюффон (1707-1788) подбрасывал монету 4040 раз (табл.2). Английский математик Карл Пирсон (1857-1936) подбрасывал монету 24000 раз (табл.3).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Исходы | Герб | Цифра |
| Число  Испытаний | 2048 | 1992 |
| Частота | 0,5069 | 0,4931 |

Таблица 2.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Исходы | Герб | Цифра |
| Число  Испытаний | 12012 | 11988 |
| Частота | 0,5005 | 0,4995 |

Таблица 3.

Частота выпадения герба при увеличении числа опытов, как правило, все меньше отличается от числа 0,5. Это вполне объяснимо, если монета недеформированная, «правильная», т. е. ее центр тяжести совпадает с геометрическим центром.

Иначе получается при подбрасывании канцелярской кнопки. Пусть, например, после 10000 подбрасываний кнопки получена таблица частот (табл.4).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Положение  острия кнопки | Вверх | Вниз |
| Частота | 0,595 | 0,405 |

Таблица 4.

Практика показывает, что при большом числе опытов частота выпадения кнопки острием вверх, как правило, близко к 0,6, а вниз – к 0,4.

Теоретически ожидаемое постоянное число, около которого группируется (за редким исключением) частоты при массовых испытаниях, называют вероятностью соответствующего исхода (результат наблюдения). Частота – есть эмпирический прообраз вероятности.

Вероятность выпадения герба при подбрасывании монете равна 0,5. Такая же вероятность выпадения цифры, т.е. равна 0,5. Исходы (результаты наблюдений, имеющие равные вероятности, называют равновозможными). Число 0,6 можно применять за вероятность выпадения кнопки острием вверх, а число 0,4 – за вероятность выпадения острием вниз. Эти исходы неравновероятны.

1. ***Закрепление изученного материала.***

***Задание.***

1. Являются ли равновероятными следующие события:

а) Опыт—бросок монеты; события: «выпал герб» и «выпала цифра».

б) Опыт —бросок неправильной монеты (погнутой); события: «выпал герб» и «выпала цифра».

в) Опыт — выстрел по цели; события: «промах» и «попадание».

г) Опыт — бросок двух монет; события: *А* = «выпало два герба», *В=* «выпало две цифры» и С = «выпали герб и цифра».

д) Опыт — бросок игральной кости; события; *А* == «выпало не менее трех очков» и *В* = «выпало не более четырех очков».

е) Опыт — вынимание косточки домино из полного набора 28 косточек; события: *А* = «вынуто 6», *В* = «вынуто пусто».

**5. *Итоги урока. Вопросы для повторения:***

1) Что такое вероятность события?

2) Как определяется частота?

3) Какие подходы существуют для определения вероятности?

**6. *Постановка домашнего задания.***

***Задания.***

1. Приведите пример опыта, в котором можно указать три попарно несовместных события, не образующих множество исходов опыта.
2. Приведите пример опыта и четырех его событий, таких, чтобы эти четыре события не составляли множество исходов опыта, но одно из них в результате опыта происходит обязательно.
3. Приведите пример опыта с тремя исходами.

**3.3.2 Практическая работа**

*Тема урока:* Классическое определение вероятности.

*Цель урока:*

1. закрепить знание формулы;
2. способствовать развитию навыка самостоятельного применения знаний при решении задач, внимания;
3. воспитать усидчивость, терпение.

*Оборудование:* доска, мел, набор задач.

*Структура урока.*

1. ***Организационный момент.***
2. ***Сообщение темы и цели занятия.***
3. ***Изучение нового материала.***

*Учитель.*Изучение понятия вероятности события обычно начинается с самого простого частного случая, — так называемого классического определения. Оно опирается на понятие равновероятности событий.

Начнем с примеров. В опыте с броском монеты события Г=«выпал герб» и *Ц* = «выпала цифра» очевидно равновероятны. Это утверждение основано на том, что монета симметрична и однородна. В опыте с броском игральной кости события Q1, Q2, ..., Q6 тоже, очевидно, равновероятны. Это следует из однородности материала кости и ее симметричной формы. Таким образом, равновероятность событий обычно устанавливается исходя из того, что условия опыта симметричны относительно рассматриваемых событий. При этом симметрия понимается в широком смысле этого слова и геометрическая симметрия, и физическая симметрия (например, однородность материала, из которого изготовлена игральная кость или монета) и так далее. То есть для того чтобы можно было начать, решение задачи средствами теории вероятностей, необходимо, чтобы вероятности некоторых событий в задаче уже были указаны. Откуда же эти вероятности берутся?" Их дают те конкретные науки, в рамках которых возникла решаемая вероятностная задача. При этом зачастую основную роль играют соображения не математические, а той науки, в рамках которой возникла задача. Понятие равновероятности событий — это есть одна из форм указания начальных вероятностей.

Теперь можно дать **классическое определение вероятности случайного события.**

**Определение.**Пусть множество исходов опыта состоит из n равновероятных исходов. Если m из них благоприятствуют событию А, то вероятностью события А называется число p(A)=

1. ***Решение задач.***

***Задание 1.*** Какова вероятность того, что при броске игральной кости выпадет четное число очков?

*Решение.* В опыте «бросок игральной кости» мы имеем 6 равновероятных исходов: события Q1 *,* Q2, ..., Q6. Нас интересует вероятность события Qч. Этому событию благоприятствуют три исхода опыта: события Q2, Q4 и Q6. Следовательно n = 6, *т =* 3, а искомая вероятность



***Задание 2.*** Бросали две монета. Какова вероятность того, что на каждой монете выпал герб?

*Решение.* Сразу напрашивается множество исходов, состоящее из трех событий (здесь опыт — фосок двух монет): «на обеих монетах выпал герб» = *Г,* «на обеих монетах выпала цифра» = *Ц* и «на одной монете выпал герб, а на другой монете выпала цифра» *= А.* Но интуитивно ясно, что это не равновероятные события — событие *А* имеет больше шансов появиться. Чтобы получать равновероятные исходы, внесем в этот опыт некоторое дополнение, которое не изменит вероятностной структуры задачи. Именно, возьмем одну монету медную, а другую серебряную. Это добавление позволит выделить равновероятные исходы испытания. Ими будут события Г, Ц, А1= «на серебряной монете выпал герб, на медной монете выпала цифра» и А2 = «на серебряной монете выпала цифра, на медной монете выпал герб». Эти четыре события уже равновероятны, поскольку условия опыта относительно них симметричны. Они также образуют множество исходов рассматриваемого опыта. Теперь все подготовлено для того, чтобы можно было обратиться к теории вероятностен {до сих пор мы пользовались условиями задачи для выяснения некоторых основных, исходных вероятностей: в нашем случае это сводилось к выявлению равновероятных исходов испытания). Равновероятных исходов испытания 4, т. е. *п=* 4. Нас интересует вероятность события Г. Ему благоприятствует только один исход, т. е. *т =1.* Следовательно, искомая вероятность



***Задание 3.*** Из семи одинаковых билетов один выигрышный. Семь человек по очереди и наугад берут (и не возвращают обратно) по одному билету. Зависит ли вероятность взять выигрышный билет от номера в очереди?

*Решение.* Опишем математическую модель этого примера. Перенумеруем все билеты, начиная с выигрышного. В результате опыта билеты оказываются распределенными между людьми, которые занимали определенные места в очереди. Этим упорядочивается множество из семи билетов: на первом месте оказывается билет, взятый человеком, стоявшим в очереди первым; на втором месте оказывается билет, взятый человеком, стоявшим в очереди вторым, и т. д. Таким образом, исходом опыта является получение некоторой перестановки из 7 билетов, их число n=7!*.* Поскольку билеты берутся наугад, то все эти. исходы равновероятны. Нас интересует вероятность события *А*= «человек, стоявший в очереди на *k-м* месте, взял выигрышный билет». Этому событию благоприятствуют исходы, при которых получаются перестановки, имеющие на *k-м* месте выигрышный билет, а остальные 6 мест заняты произвольной перестановкой из оставшихся шести невыигрышных билетов, их число *т=* 6! Следовательно,



Видим, что вероятность взять выигрышный билет не зависит от номера очереди.

***Задание 4.***На пяти одинаковых на ощупь карточках написаны буквы: на двух карточках—буква Л и на трех карточках— буква И. .Выкладываем наугад эти карточки подряд. Какова вероятность того, что выложится слово ЛИЛИИ?

Решение. Опыт в этой задаче состоит в получении наугад некоторого «слова» из имеющихся пяти букв. Нас интересует вероятность события *С =* «получено слово ЛИЛИИ». Для выявления равновероятных исходов перенумеруем буквы так: Л1, Л2, И1, И2, И3. Теперь в результате опыта мы будем получать слово из нумерованных букв. События «получено слово Л1И1Л2И2И3»и «получено слово Л2И1Л1И3И2» разные, хотя и в том и в другом случае получено слово ЛИЛИИ, т. е. произошло интересующее нас событие С. Выписанные события благоприятствуют событию С. Ясно, что события, выписанные выше, и все возможные аналогичные есть равновероятные исходы нашего опыта. Число их равно числу перестановок в множестве из пяти элементов, т. е. *п=* 5!=120. Подсчитаем при помощи принципа произведения число исходов, благоприятствующих событию *С.*

Рассмотрим множество *В=* {(Л1Л2); (Л2Л1)}, состоящее из двух возможных перестановок нумерованных букв Л, и множество *А,* состоящее из шести перестановок нумерованных букв И1И2И3. Каждый исход, благоприятствующий событию С, можно получить так: берем элемент множества *В* и ставим буквы Л (сохраняя их порядок) на первое и третье места в слове. Оставшиеся места занимаем каким-нибудь элементом множества *А* (не изменяя порядка нумерованных букв И). Таким образом, каждый исход получается как пара: элемент из В и элемент из А. В силу принципа произведения число таких исходов *т* = 2 • 6 =12. Вероятность же интересующего нас события 

1. ***Итоги урока. Вопросы для повторения:***
   1. Что такое вероятность, частота события?
   2. Сформулируйте классическое определение вероятности?

***6. Постановка домашнего задания.***

***Задание 1.*** Бросили две игральные кости и сосчитали сумму выпавших очков. Что вероятнее получить в сумме: 7 или 8?

*Решение*. В этой задаче опыт состоит в том, что бросают две игральные кости и берут сумму выпавших очков. Исходы этого опыта таковы: «в сумме выпало 2», «в сумме выпало 3» и т. д., «в сумме выпало 12». Но это не равновероятные исходы. Действительно, в сумме может получиться 2 только одним способом: 2 = 1 + 1, а в сумме может получиться 4 двумя способами: 4 = 1 + 3 и 4 = 2 + 2, т. е. шансов на то, что в сумме получится 4, больше. Теперь попробуем уточнить выбор исходов опыта и рассмотрим такие события: «на одной кости выпало *k*очков, а на другой — р»: *k*= 1, 2, 3, 4, 5, 6 и *р* = 1, 2, 3, 4, 5, 6. Но это тоже не равновероятные исходы опыта: интуиция подсказывает, что выпадение одинакового числа очков менее вероятно, чем разного. Чтобы получить равновероятные исходы, внесем в эту задачу некоторый дополнительный элемент, который не меняет вероятностную сторону задачи. Именно, окрасим кости в разные цвета— красный и синий. Но этот элемент позволит нам, наконец, выявить равновероятные исходы рассматриваемого опыта. Это будут следующие события: «на красной кости выпало *k*очков, а на синей — *р*очков» = *(k; p).* Поскольку кости отличаются только цветом, то ясно, что указанные события равновероятны и, кроме того, они образуют множество исходов нашего опыта. Остается подсчитать число всех исходов. Их 36, поскольку каждое из 6 очков, которые могут выпасть на красной кости; может быть в паре с любым из 6 очков, которые могут выпасть на синей. Теперь подсчитаем число исходов, благоприятствующих рассматриваемым событиям. Событию «сумма выпавших очков равна семи» = *А* благоприятствуют следующие 6 исходов: *(*1*;* 6), (2; 5),(3; 4), (4; 3), (5; 2) и (6; 1). Следовательно,



Событию «сумма выпавших очков равна 8» = *В* благоприятствуют следующие 5 исходов: (2; 6), (3; 5), (4; 4), (5; 3), (6; 2). Следовательно,



Мы видим, что сумма очков 7 есть более вероятное событие, чем сумма очков 8. Интересно отметить, что этот факт был замечен игроками в кости. Попытки его объяснить (и решение ряда задач по страхованию и т. п.) привели к созданию математической теории — начал теории вероятностей.

***Задание 2.*** В ящике лежат 20 одинаковых на ощупь шаров. Из них 12 белых и 8 черных. Наугад вынимают один шар. Какова вероятность того, что он окажется белым? (Точный смысл выражения «наугад вынимается шар» будет выяснен в процессе решения.)

*Решение.* В этой задаче рассматривается следующий опыт: из ящика наугад вынимают шар и смотрят его цвет. Сразу напрашивается множество исходов, состоящее из двух событий: *Ч*= «вынутый шар черный» и *Б* = «вынутый шар белый». Но эти исходы неравновероятны, так как белых шаров больше и шансов вынуть белый шар больше. Для выявления в этом опыте множества равновероятных исходов внесем в опыт дополнительный элемент, не нарушающий вероятностной структуры задачи, а именно, перенумеруем все шары. Белым шарам поставим в соответствие номера с 1 по 12, а черным — номера с 13 по 20. События «вынут шар с номером k»=АKуже равновероятны, так как шары на ощупь неотличимы и вынимаются наугад. Кроме того, эти 20 событий образуют множество исходов нашего опыта. Следовательно, *п* = 20, а интересующему нас событию *В* благоприятствуют первые 12 исходов, т. е. *т* =12. Следовательно,



Точный смысл выражения «наугад вынимается шар» состоит в том, что введенные события *A*kравновероятны.

**3.4 Геометрическая вероятность. Урок – семинар**

Семинары характеризуются, прежде всего, двумя взаимосвязанными признаками: самостоятельным изучением учащимися программного материала и обсуждением на уроке результатов их познавательной деятельности. На них ребята учатся выступать с самостоятельными сообщениями, дискутировать, описывать свои суждения. Различают уроки – семинары по учебным задачам, источникам получения знаний, формами их проведения и т.д. наибольшее распространение получили семинары, посвященные повторению, углублению и обобщению пройденного материала. Это семинары – развернутые беседы, семинары-доклады, рефераты, творческие письменные работы, поименованное чтение, семинар-диспут, решение задач, конференции. Укажем основные случаи, когда предпочтительно организовать уроки в виде семинаров:

1. при изучении нового материала, если ученики могут его освоить самостоятельно;
2. после проведения вводных, установочных и текущих лекций. На этих семинарах рассматривается дополнительный материал, приобретаются новые знания, рассматриваются исторические сведения и практические приложения изучаемого материала;
3. после обобщения и систематизации знаний и умений учащихся по изучаемой теме;
4. при проведении урока, посвященного различным методам решения задач, выполнение заданий и упражнений.

Цель проведение семинаров состоит в том, чтобы сделать теоретические обобщения, систематизировать изученный материал, отобрать основные методы и способы решения, показать связь математики (теории вероятностей) с жизнью. Проведение семинарских занятий активизирует процесс обучения, учит учащихся выступать, формирует у них познавательные и исследовательские умения, повышают математическую культуру, развивают речь и уровень общения.

Эффективность семинарских занятий в значительной мере зависит от организации его подготовки. На подготовку к семинару необходимо выделить не менее двух недель. Учащимся сообщается тема семинара, основные вопросы теории, по которым будет проведен опрос, указываются задачи, приемами решения которых должны овладеть все учащиеся, дается некоторый набор нестандартных упражнений, в процессе решения которых необходимо проявить элементы творчества. Можно предложить учащимся самим подобрать такие упражнения и показать на семинаре рациональные способы их решения. Распределяются индивидуальные и групповые задания по подготовке сообщений по истории рассматриваемого вопроса, его практических и межпредметных приложений. В процессе подготовки к семинару ученики по рекомендации учителя изучают дополнительную литературу, читают научно-популярные книги. Подготовка к семинару является для учащихся одновременно подготовкой к очередной проверочной работе и к зачету по теме.

Семинар проводится со всеми учащимися класса. Учитель-координатор подготовки и проведения семинара. Он заблаговременно определяет тему, цель и задачи семинара, планирует его проведение, формирует основные и дополнительные вопросы темы, распределяет задания между учащимися с учетом их индивидуальных возможностей, подбирает литературу, проводит консультации, проверяет конспекты. Семинарское занятие начинается вступительным словом учителя, в котором он сообщает тему, план, цель и задачи его проведения, рекомендует на что необходимо обратить внимание, что следует записать, дает другие советы. Далее обсуждаются вопросы семинара – по каждому вопросу учителю необходимо дать комментарии, акцентировать внимание учащихся на главной мысли и математической идее сообщения, делает дополнения и обобщения, отвечает на вопросы учеников. Подводятся итоги, учитель отмечает положительное, анализирует содержание, форму выступлений учеников, указывает на недостатки и пути их преодоления.

**Урок – семинар**

*Тема урока:* Геометрическая вероятность.

*Цель урока:*

1. ввести понятие геометрической вероятности;
2. способствовать развитию логического и пространственного воображения учащихся;
3. воспитать самостоятельность, терпение, усидчивость.

*Оборудование:* доска, мел, чертежи, набор задач.

*Структура урока.*

1. Организационный момент.
2. Сообщение темы и цели занятия.
3. Изучение нового материала.

1) У*читель.* Теория вероятностей, подобно другим математическим наукам, развилась из потребностей практики.

До конца XVII века наука так и не подошла к введению классического определения вероятности, а продолжала оперировать только с числом шансов, благоприятствующих тому или иному событию. В 30 – е годы XVIII столетия классическое понятие вероятности стало общеупотребимым. Так в трактовке Я. Бернулли “ Искусство предположений “ присутствуют обе концепции вероятности – классическая и статистическая, обе они изложены не очень четко, но существенно то, что они уже введены в рассмотрения и использования.

Однако уже в первой половине XVIII века выяснилось, что классическое понятие вероятности имеет ограниченную область применения и возникают ситуации, когда оно не действует, а потому необходимо его расширение. Таким толчком послужили работы французского естествоиспытателя Ж. Бюффона (1707 – 1788), в которой он сформулировал знаменитую задачу о бросании иглы на разграфленную плоскость и предложил ее решение.

Классического определения вероятности нельзя применить к опыту с бесконечным числом «равновероятных» исходов. К описанию такой ситуации приспособлено геометрическое определение вероятности. Т. о. *геометрические вероятности*—вероятности попадания точки в область (отрезок, часть плоскости и т. д.).

Пусть отрезок l составляет часть отрезка L. На отрезок L наудачу поставлена точка. Это означает выполнение следующих предположений: поставленная точка может оказаться в любой точке отрезка L, вероятность попадания точки на отрезок l пропорциональна длине этого отрезка и не зависит от его расположения относительно отрезка L. В этих предположениях вероятность попадания точки на отрезок l определяется равенством

Р== Длина l/Длина L. (5)

Для иллюстрации схемы геометрических вероятностей рассмотрим следующие задачи.

2) *Ученик.* ***Парадокс Бертрана***. Наудачу берется хорда в круге. Чему равна вероятность, что ее длина превосходит длину стороны вписанного равностороннего треугольника?

*Решение 1.* По соображениям симметрии можно заранее задать направление хорды. Проведем диаметр, перпендикулярный к этому направлению. Очевидно, что только хорды, пересекающие диаметр в промежутке от четверти до трех четвертей его длины, будут превосходит стороны правильного треугольника. Таким образом, искомая вероятность равна 

*Решение 2.*По соображениям симметрии можно заранее закрепить один из концов хорды на окружности. Касательная к окружности в этой точке и две стороны правильного треугольника с вершиной в этой точке образуют три угла по 600. Условию задачи благоприятствуют только хорды, попадающие в средний угол. Таким образом, при этом способе вычисления искомая вероятность оказывается равной 

*Решение 3.*Чтобы определить положение хорды, достаточно задать ее середину. Чтобы хорда удовлетворяла условию задачи, необходимо, чтобы ее середина находилась внутри круга, концентрического данному, но половинного радиуса. Площадь этого круга равна одной четверти площади данного; таким образом, искомая вероятность равна 

Причина неоднозначности решения нашей задачи заключается в том, что за решение одной и той же задачи, пользуясь тем, что в условии задачи не определенно понятие проведения хорды на удачу, выдаются решения трех различных задач.

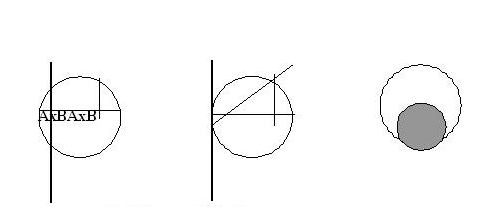
В самом деле, в первом решении вдоль одного из диаметров заставляют катится круглый цилиндрический стержень (рис. 7, а) . Множество всех возможных мест остановки этого стержня есть множество точек отрезка AB длины, равной диаметру. Равновероятными считаются события, состоящие в том, что остановка произойдет в интервале длины h, где бы внутри диаметра ни был расположен этот отрезок.

Во втором решении стержень, закрепленный на шарнире, расположенном в одной из точек окружности, заставляют совершать колебания размером не более 1800 (рис. 7, б). При этом предполагается, что остановка стержня внутри дуги окружности длины h зависит только от длины дуги, но не от ее положения. Таким образом, равновероятным событиям считаются остановки стержня в любых дугах окружности одинаковой длины. Несогласованность определений вероятности в первом и во втором решениях становится совершенно очевидным после такого простого расчета. Вероятность того, что стержень остановится в промежутке от A до x, согласно первому решению равна  Вероятность того, что проекция точки пересечения стержня с окружностью во втором решении попадет в тот же интервал, как показывают элементарно – геометрические подсчеты, равна

 при 

и

 при 



а) б) в)

Рис. 7.

Наконец, в третьем решении мы бросаем на удачу точку внутрь круга и спрашиваем себя о вероятности попадания внутрь некоторого меньшего концентрического круга (рис. 7, в).

Различие постановок задач во всех трех случаях совершенно очевидно.

3) *Ученик.****Задача Бюффона***. Плоскость расчерчена параллельными прямыми, расстояние между которыми равно 2а. На плоскость наудачу брошена игла длины 2l (l< а). Найти вероятность того, что игла пересечет какую-нибудь прямую.

*Решение.* Обозначим через x расстояние от центра до ближайшей параллели и через –  угол, составленный иглой с этой параллелью. Величины x и  полностью определяют положение иглы. Всевозможные положения иглы определяются точками прямоугольника со сторонами a и . Из рис. 8 видно, что для пересечения иглы с параллелью необходимо и достаточно, чтобы



Искомая вероятность в силу сделанных предположений равна отношению площади заштрихованной на рис. 9 области к площади прямоугольника



Заметим, что задача Бюффона является исходным пунктом для решения некоторых проблем теории стрельбы, учитывающих размеры наряда.

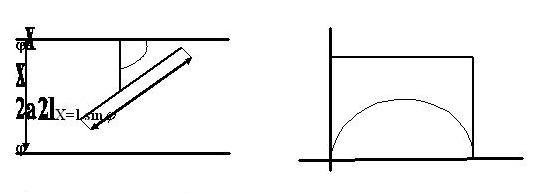


Рис. 8. Рис. 9.

Полученная формула была использована для опытного определения приближенного значения числа . Таких опытов с бросанием иглы было проведено довольно много. Мы приведем результаты лишь некоторых из них:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Экспериментатор | Год | Число бросаний иглы | Экспериментательное число |
| Вольф | 1850 | 5000 | 3,1596 |
| Смит | 1855 | 3204 | 3, 1553 |
| Фокс | 1894 | 1120 | 3, 1419 |
| Лаццарини | 1901 | 3408 | 3, 1415929 |

Так как из полученной нами формулы следует равенство

Y

X



то при большом числе бросаний n приближенно



где m – число происшедших при этом пересечений.

Заметим, что в результате Фокса и Лаццарини заслуживают малого доверия. Действительно, в опыте Лаццарини значение получилось с шестью точными знаками после запятой. Изменение числа пересечений ( числа m ) на единицу меняет по меньшей мере четвертый десятичный знак, если n меньше 5000. В самом деле (  ).



4) *Учитель.*В XX веке интерес к геометрической вероятности не ослабел, а вырос, поскольку, помимо чисто математического интереса, они приобрели и серьезное прикладное значение. Схема геометрических вероятностей успешно применяется в астрономии, атомной физике, биологии, кристаллографии.

Современное развитие теории вероятностей характерно всеобщим подъемом интереса к ней и резким расширением круга ее практических применений. За последние десятилетия теория вероятностей превратилась в одну из наиболее быстро развивающихся наук, теснейшим образом связанную с потребностями практики и техники.

***5. Итоги урока. Учитель обобщает изученный материал:***

*Замечание 1.* Приведенные определения для вычисления геометрической вероятности в начале урока (формула (5)) являются частными случаями общего определения геометрической вероятности. Если обозначить меру (длину, площадь, объем) области через mes, то вероятность попадания точки, брошенной наудачу (в указанном выше смысле) в область g—часть области G, равна

Р = mesg/mesG.

*Замечание 2.* В случае классического определения вероятность достоверного (невозможного) события равна единице (нулю); справедливы и обратные утверждения (например, если вероятность события равна нулю, то событие невозможно). В случае геометрического определения вероятности обратные утверждения не имеют места. Например, вероятность попадания брошенной точки в одну определенную точку области G равна нулю, однако это событие может произойти, и, следовательно, не является невозможным.

***6. Постановка домашнего задания.***

***Задание.*** На плоскости начерчены две концентрические окружности, радиусы которых 5 и 10 см соответственно. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу в большой круг, попадет в кольцо, образованное построенными окружностями. Предполагается, что вероятность попадания точки в плоскую фигуру пропорциональна площади этой фигуры и не зависит от ее расположения относительно большого круга.

*Решение*. Площадь кольца (фигуры g) Sg=

Площадь большого круга (фигуры G) 

Искомая вероятность Р*=*

**3.5 Основы теории вероятностей. Урок – консультация**

На уроках данного типа проводится целенаправленная работа по ликвидации пробелов в знаниях учащихся, концентрируется внимание учащихся на главных и существенных моментах изучаемой темы, вырабатываются умения учиться, обобщается и систематизируется материал. Учитель на таких занятиях анализирует подробно ответы всех учеников, такой анализ повышает интерес школьников к работе, подводит каждого из них к пониманию пробелов или достижений, к необходимости работать над преодолением недостатков. В зависимости от содержания и назначения выделяют тематические и целевые уроки-консультации. Тематические проводятся либо по каждой теме, либо по наиболее значимым, сложным вопросам программного материала. Целевые консультации входят в систему подготовки, подведения итогов самостоятельных и контрольных работ, зачетов, экзаменов. Это могут быть уроки работы над ошибками, уроки анализа какой-то творческой деятельности или подготовки учащихся к семинару. На консультациях сочетаются различные формы работы с учащимися: коллективные, групповые и индивидуальные.

Готовится к урокам-консультациям необходимо как учащимся, так и учителю. Учитель систематизирует затруднения, недочеты, ошибки в устных и письменных ответах учеников. Делает логико-дидактический анализ темы, на этой основе уточняет перечень возможных вопросов, которые будут рассмотрены на консультации. Ребята приучаются в свою очередь готовиться к консультациям - сроки, вопросы и задания которых заранее объявляются.

На первых уроках-консультациях учащиеся затрудняются задавать вопросы, поэтому их нужно заранее приучать к этому. Можно накануне дать задание каждому составить карточки неясных вопросов, поработать с учебником, заново прочитать текст и записать непонятное. Самому же учителю к первым урокам-консультациям необходимо готовить вопросы, прогнозируя на них затруднение у учащихся, ошибки в ответах. Учителю необходимо уточнить перечень возможных вопросов, которые будут рассмотрены на уроке, обобщить в единые блоки по сходственным идеям, отобрать наиболее значимые и существенные, перенеся остальные на другие формы дополнительных занятий с учащимися. Хорошо когда вместо предложенных заданий учитель решает более общую задачу, когда идет поиск ответа на поставленный вопрос и он становится общим делом в деятельности учителя и учеников.

В ходе урока-консультации учитель получает возможность узнать учеников с лучшей стороны, пополнить сведения о желании их продвижения, выявить наиболее любознательных и пассивных, поддержать и помочь тем, кто испытывает затруднения.

**Урок-консультация**

*Тема урока:* Основы теории вероятностей.

*Цель урока:*

1. способствовать устранению пробелов в знаниях учащихся;
2. обобщить и систематизировать изученный материал;
3. способствовать развитию творческой активности, мышления, памяти.

*Оборудование:* доска, мел, набор задач.

*Структура урока.*

1. ***Организационный момент.***
2. ***Сообщение темы и цели занятия.***
3. ***Актуализация базовых знаний. Фронтальный опрос.***
   1. Вся совокупность событий условно может быть разделена на 3 вида (группы) – какие?

а) ***случайные***, которые могут произойти либо не произойти;

б) ***невозможные***, которые заведомо не могут произойти;

в) ***достоверные,*** которые заведомо произойдут при выполнении определенного комплекса условий.

2. Что такое вероятность, частота события?

*Теоретически ожидаемое постоянное число, около которого группируется (за редким исключением) частоты при массовых испытаниях, называют* ***вероятностью*** *соответствующего исхода (результат наблюдения).* ***Частота –*** *есть эмпирический прообраз вероятности.*

3. Сколько подходов (один или несколько) существует для определения вероятности события?

***Классический, статистический и геометрический*.**

4. Дайте классическое определение вероятности?

*Вероятность события A определяется формулой* ***P(A)= ***

*где m — число элементарных исходов, благоприятствующих А;*

*n — число всех возможных элементарных исходов испытания****.***

1. ***Решение задач.***

***Задание 1.*** В коробке 3 красных, 3 желтых, 3 зеленых шара. Вытаскивают наугад n шаров. Рассмотрим событие С: среди n вынутых шаров окажутся шары ровно m цветов.

Для каждого n от 1 до 9 и каждого m от 1 до 4 определите, какое это событие - невозможное, случайное или достоверное, и заполните таблицу.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Характеристика события С в зависимости от n и m | | | | |
| Число  расцветок  (m)  Число  шаров (n) | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | Д | Н | Н | Н |
| 2 | С | С | Н | Н |
| 3 | С | С | С | Н |
| 4 | Н | С | С | Н |
| 5 | Н | С | С | Н |
| 6 | Н | С | С | Н |
| 7 | Н | Н | Д | Н |
| 8 | Н | Н | Д | Н |
| 9 | Н | Н | Д | Н |

***Задание 2*.** Набирая номер телефона, абонент забыл одну цифру и набрал се наудачу. Найти вероятность того, что набрана нужная цифра.

*Решение*. Обозначим через А событие—набрана нужная цифра. Абонент мог набрать любую из 10 цифр, поэтому общее число возможных элементарных исходов равно 10. Эти исходы несовместны, равновозможны и образуют полную группу. Благоприятствует событию А лишь один исход (нужная цифра лишь одна). Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов:

Р (A) ==1/10.

***Задание 3.*** Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

*Решение*. Обозначим через В событие—набраны две нужные цифры. Всего можно набрать столько различных цифр, сколько может быть составлено размещений из десяти цифр по две, т. е. . Таким образом, общее число возможных элементарных исходов равно 90. Эти исходы несовместны, равновозможны и образуют полную группу. Благоприятствует событию В лишь один исход. Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов:

Р(B)=1/90.

***Задание 4.*** На отрезок ОА длины L числовой оси Ох наудачу поставлена точка B (х). Найти вероятность того, что меньший из отрезков ОB и ВА имеет длину, большую L/3. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения на числовой оси. *Решение.* Разобьем отрезок ОА точками С и D на 3 равные части. Требование задачи будет выполнено, если точка В (х) попадет на отрезок CD длины L/3. Искомая вероятность

P==(L/3)/L=1/3.

Пусть плоская фигура g составляет часть плоской фигуры G. На фигуру G наудачу брошена точка. Это означает выполнение следующих предположений: брошенная точка , может оказаться в любой точке фигуры G, вероятность попадания брошенной точки на фигуру g пропорциональна площади этой фигуры и не зависит ни от ее расположения относительно G, ни от формы g. В этих предположениях вероятность попадания точки в фигуру g определяется равенством

Р = Площадь g/ Площадь G.

1. ***Итоги урока. Вопросы для повторения:***
   * 1. На какие 3 группы может быть условно разделена вся совокупность событий?
     2. Сколько и какие подходы существует для определения вероятности события?
     3. Сформулируйте классическое и геометрическое определения вероятности?

***6. Постановка домашнего задания:*** *подготовится к уроку-игре»Восхождение на пик знаний»* ***(*** повторить теоретический материал и решение задач по изученной теме).

**3.6 Урок – игра «Восхождение на пик знаний»**

Игра «Восхождение на пик знаний» является многоцелевой, поскольку позволяет решить комплекс дидактических задач. Устные упражнения дают возможность повторить основные понятия, факты, законы, развивают логическое мышление, речь учащихся. Письменные задания представлены на карточках и каждый ученик может выбрать оптимальный путь решения, продемонстрировав умение точно излагать математическую мысль и показать владение материалом.

В конце игры учитель подводит итоги, выставляя оценки отдельным учащимся, награждает призами выигрышную команду.

**Урок – игра**

*Тема урока:* Основы теории вероятностей.

*Цель урока:*

1. повторить изученный материал;
2. расширить кругозор учащихся.

*Цель игры:*

1. повысить интерес к математике;
2. способствовать развитию внимания, взаимопомощи, чувства товарищества

*Оборудование:* плакат с указанными маршрутами, набор карточек.

*Структура урока.*

***1.Сообщение темы и цели занятия.***

***2. Организация учащихся на проведения игры.***

Учитель сообщает правила игры: игровое поле представляет собой рисунок с горным пейзажем и 2 маршрутами восхождения, на которых отмечены привалы, пронумерованные от 1 до 3. Перед началом игры формируется 2 команды, выбираются капитаны. Команды находятся на исходных позициях –«базах». В начале игры капитаны команд получают карточки с устными логическими упражнениями, которые решаются коллективно. Выполнив первое задание команда может начать двигаться по маршруту, выбрав себе номер маршрута.

Письменные задания выполняются у доски. Правильное решение задачи у доски одним из членов команды дает возможность продвинутся к «пику знаний». В противном случае она должна оставаться на привале, пока не придут «спасатели» (члены другой команды).

В случае, если команда быстро и успешно продвигается по маршруту от привала к привалу, то учитель может объявить «спуск снежной лавины», предложив команде коллективно решить еще одну задачу.

Выигрывает команда, которая правильно выполнит все задания и достигнет «пика знаний».

**3. *Организация учащихся на выполнение работы.***

Учитель помогает сформировать команды, раздает карточки с заданиями и следит за ходом игры.

**Устные логические упражнения**

***Задание 1 команде.*** На тетрадный лист бумаги в линейку бросают иглу (расстояние между линейками 1 см). При какой длине иглы событие А: игла пересекла 5 линий

Будет: а) невозможным; б) случайным; в) достоверным?

**Ответ. а**) меньше 4см;

б) больше 4 см;

в) ни при какой.

***Задание 2 команде.*** Из дома до школы ученик идет пешком от 10 до 15 минут, а едет на троллейбусе – от 2 до 3 минут. При каких интервалах движения троллейбусов событие

А: по пути в школу ученик обгонит хотя бы один троллейбус

Будет: а) невозможным; б) случайным; в) достоверным?

**Ответ. а**) ни при какой;

б) больше 7 минут;

в) меньше 7 минут.

**Задачи для решения на привалах**

**Привал 1**

***Задание 1 команде.*** В коробке 3 красных, 3 желтых, 3 зеленых шара. Вытаскивают наугад n шаров. Рассмотрим событие А: среди вынутых шаров окажутся шары ровно трех цветов. Для каждого n от 1 до 5 определите, какое это событие - невозможное, случайное или достоверное, и заполните таблицу.

***Решение.***

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Число вынутых шаров (n) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Характеристика События А | Н | Н | С | С | С |

***Задание 2 команде.*** В коробке снова 3 красных, 3 желтых, 3 зеленых шара. Вытаскивают наугад 4 шара. Рассмотрим событие В: среди вынутых шаров окажутся шары ровно m расцветок. Для каждого m от 1 до 4 определите, какое это событие - невозможное, случайное или достоверное, и заполните таблицу.

***Решение.***

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Число расцветок (m) | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Характеристика события В | Н | С | С | С |

**Привал 2**

***Задание 1 команде.*** При перевозке ящика, в котором содержались 21 стандартная и 10 нестандартных деталей утеряна одна деталь, причем неизвестно какая. Наудачу извлеченная (после перевозки) из ящика деталь оказалась стандартной. Найти вероятность того, что была утеряна стандартная деталь.

***Решение.***

Извлеченная стандартная деталь, очевидно, не могла быть утеряна; могла быть потеряна любая из остальных 30 деталей (21+10-1=30), причем среди них было 20 стандартных (21-1=20). Вероятность того, что была потеряна стандартная деталь,

P=

***Задание 2 команде.*** При перевозке ящика, в котором содержались 21 стандартная и 10 нестандартных деталей утеряна одна деталь, причем неизвестно какая. Наудачу извлеченная (после перевозки) из ящика деталь оказалась стандартной. Найти вероятность того, что была утеряна нестандартная деталь.

***Решение.***

Среди 30 деталей, каждая из которых могла быть утеряна, было 10 нестандартных. Вероятность того, что потеряна нестандартная деталь,

P=

**Привал 3**

***Задание 1 команде.*** Внутрь круга радиуса R наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг квадрата. Предполагается, что вероятность попадания точки в часть круга пропорциональна площади этой части и не зависит от ее расположения относительно круга.

***Решение.***

Введем обозначения: R- радиус круга, а – сторона вписанного квадрата, А – попадание точки в квадрат, S – площадь круга, S1 – площадь вписанного квадрата. Как известно площадь круга S=πR2. Сторона вписанного квадрата через радиус описанной окружности выражается формулой , поэтому площадь квадрата S1=2R2. Полагая в формуле Sg=S1, SG=S, находим искомую вероятность



***Задание 2 команде.*** Внутрь круга радиуса R наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг правильный треугольник. Предполагается, что вероятность попадания точки в часть круга пропорциональна площади этой части и не зависит от ее расположения относительно круга.

***Решение.***

Введем обозначения: R- радиус круга, а – сторона вписанного равностороннего треугольника, А – попадание точки в треугольник, S – площадь круга, S1 – площадь вписанного равностороннего треугольника. Как известно площадь круга S=πR2. Сторона вписанного равностороннего треугольника через радиус описанной окружности выражается формулой , поэтому площадь треугольника S1=. Полагая в формуле Sg=S1, SG=S, находим искомую вероятность



1. ***Итоги урока:***

1) объявляется команда победителей;

2) вручаются похвальных грамоты наиболее активным участникам игры;

1. коллективно разбираются нерешенные задачи или предлагаются другие способы решения задач.

**Заключение**

В процессе выполнения выпускной квалификационной работы было проведено исследование по совершенствованию методически преподавания школьной стохастики. Исходя из психолого-педагогических и методических особенностей разработан и апробирован факультативный курс «Элементы теории вероятностей» для 10-11 классов общеобразовательной школы, рассчитанный на 6 уроков.

Экспериментальное преподавание проводилось в школе № 43 ст. НоводеревянковскойКаневского района среди учащихся 10 классов, посещавших факультативный курс. Достаточно высокий уровень усвоения знаний учащихся позволяет судить об эффективности факультативных занятий при обучении теории вероятностей в старших классах общеобразовательной школы.

Таким образом в результате выполнения выпускной квалификационной работы поставленная цель достигнута, задачи выполнены.

Перспектива дальнейшего применения материала выпускной квалификационной работы состоит в том, что она может быть использована в качестве дополнительного пособия при ознакомлении с методикой преподавания основ теорией вероятностей в средней школе как студентами и преподавателями вузов, так и учителями общеобразовательных школ при обучении теории вероятностей.

Так как ведущее место среди факторов, определяющих продуктивность дидактического процесса, занимают мотивация учения и интерес к учебному труду, то использование материала приложений (исторической справки, внеклассного мероприятия «По страницам истории») при введении основ теории вероятностей в изучение, поможет учителю не только побудить интерес к теории вероятностей, но и раскроет непосредственную близость теории вероятностей с жизнью, с практикой и другими науками.

**Список литературы**

1. Абрамова Г.С. Возрастная психология. – М.: Академия, 1999.-235с.

2. Аверьянов Д.И., Алтынов П.И., Баврин И.И. Математика: Большой справочник для школьников и поступающих в вузы. – М.: Дрофа, 1998.-864с.: ил.

3. Антипов И.Н., Виленкин Н.Я., Иващев–Мусатов О.С. Избранные вопросы математики: Факультативный курс 9 класс. – М.: Просвещение,1979.-191с.: ил.

4. Афанасьев В.В. Теория вероятностей в примерах и задачах. – Ярославль: ЯГПУ, 1994.-127с.

5. Баврин И. И., Фрибус Е.А. Старинные задачи. – М.: Просвещение, 1994.

6. Бунимович Е.А., Булычев В.А. Вероятность и статистика для школьников. – М.: Дрофа,2001.-204с.

7. Бунимович Е.А. Вероятностно-статистическая линия в базовом школьном курсе математики.- //Математика в школе.-2002.- № 4.-с.52 –58.

8. Буренок И.И., Туйбаева Л.И., Цедринский А.Д. Психолого-педагогические и методические аспекты урока математики. – Славянск – на – Кубани, 2000.- 72с.

9. Бычкова Л.О., Селютин В.Д. Об изучении вероятностей и статистики в школе. - //Математика в школе. –1991.-№6.-с. 9-12.

10. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1965.-453с.: ил.

11. Гнеденко Б.В. Статистическое мышление и школьное математическое образование. - //Математика в школе.- 1999.-№ 6.-с.2 – 6.

12. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высшая школа, 2000.-479с.: ил.

13. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. - М.: Высшая школа, 2001.-400с.: ил.

14. Министерство образования РФ. Программы для общеобразовательных школ, гимназий, лицеев:Математика 5-11 классов. – М.: Дрофа, 2002.

15. Мотикас В.С. Школьнику о теории вероятностей: Учебное пособие по факультативному курсу для учащихся 8-10 класса. – М.: Просвещение, 1976.-104с.

16. Подласый И.П. Педагогика: Книга 1. – М.: Владос, 2000.-576с.

17. Подласый И.П. Педагогика: Книга 2. – М.: Владос, 2000.-256с.

18. Рослова Л.О. О новых книгах издательства «Дрофа». - //Математика.-1999.- № 21.- с. 38-40.

19. Соловейчик И.Л. Я иду на урок математики: 6 класс. – М.: Первое сентября, 2001.-320с.: ил.

20. Степашев В.Д. Активизация внеурочной работы по математике в средней школе. – М.: Просвещение, 1991.-97с.

21. Столяренко Л.Д. Основы психологии. – Ростов-на-Дону: Феникс, 1999.-672с.

22. Тарасов Л.В. Мир, построенный на вероятности: книга для учащихся. – М.: Просвещение, 1984.-153с.

23. Токмазов Г.В. Укрупнение дидактических единиц в задачах по теории вероятностей. - //Математика в школе.-1999.- № 4.- с.81 – 84.

24. Федосеев В.Н. Элементы теории вероятностей для VII – VIII классов средней школы. - //Математика в школе. -2002.- № 4.-с.58 – 64.

25. Федосеев В.Н. Элементы теории вероятностей для IX классов средней школы. - //Математика в школе.-2002.- № 5.- с.34 – 40.

**Приложение 1**

**Внеклассное мероприятие по математике для старших классов на тему: «*По страницам истории»***

**Тема: По страницам истории.**

**Девизы урока:**

О, сколько нам открытий чудных…

**Пушкин А.С.**

Три пути ведут к знанию:

Путь размышления – самый благородный,

Путь подражания – самый легкий

И путь опыта – это путь самый горький…

**Конфуций**

**Цель урока:**

1) Развить творческую активность;

2) показать нестандартные способы решения задач по теории вероятностей;

3) побудить интерес к теории вероятностей, математике.

Учитель объявляет тему урока, зачитывает девизы, подчеркнув лаконичность, целенаправленность, точность народной мудрости и соответствие выбранных изречений задачам урока.

Обращает внимание учеников на то, что математика много дает для умственного развития человека – заставляет думать, соображать, искать простые и красивые решения, помогает развивать логическое мышление, умение правильно и последовательно рассуждать, тренирует память, внимание, формирует многие учебные навыки и умения, закаляет характер. Учитель знакомит учащихся со старинными задачами науки о случайном – показывает связь прошлого с современностью.

*Учитель:* Еще в глубокой древности появились различные игры. В Древней Греции и Риме широкое распространение получили игры в астрагалы (то есть бросание костей из конечностей животных) и игральные кости (кубики с нанесенными на гранях точками). В настоящее время игральные кости иногда изготовляют в виде додекаэдров и икосаэдров. В одной из азартных (слово «азартный» происходит от арабского «азарт» - трудный, то есть редко выпадающие комбинации костей) игр бросали одновременно четыре астрагала и фиксировался результат.

Худший бросок, при котором выпадает более одной единицы, назывался «собакой». Лучшим броском считался бросок «Венера», когда на четырех астрагалах выпадали различные грани. Позднее азартные игры распространились в Средневековой Европе.

В частности, в XIV веке появились игральные карты. В XVII веке азартные игры способствовали зарождению и становлению комбинаторики и науки о случайном (теории вероятностей). Ученые XV-XVII веков много внимания уделяли решению задач о дележе ставки, об игре в кости, лотереях и т. п.

**Задачи о дележе ставки.**

До середины XVII не было правильных задач о справедливом разделении ставки. В 1654 году между французским математиком Блезом Паскалем и Пьером Ферма возникла переписка по поводу ряда задач. Из переписки Паскаля и Ферма сохранилось лишь 3 письма Паскаля и 4 письма Ферма.

Эти письма впервые были опубликованы в Тулузе. В этой переписки оба ученых, хотя и несколько разными путями, приходят к верному решению, деля ставку пропорционально вероятности выиграть всю ставку, если игра будет продолжена.

Совпадение результатов великих ученых при решении задач о дележе ставки послужило для Паскаля поводом шутливо заметить в первом письме к Ферма от 29 июля 1654 года: «Как я вижу, истина одна:и Тулузе, и в Париже ». Ферма со своей стороны нашел решение и для более сложного случая, когда игра происходит между произвольным числом игроков.

**Задачи Блеза Паскаля.** Как разделить ставку при игре трех выигрышных партий, если один игрок выиграл две партии, а другой – одну и каждым вложено в игру по 32 пистоля ?

Решение.

Свое решение задачи Паскаль наиболее полно изложил в письме к Ферма от 29 июля 1654 года: « Вот примерно, что я делаю для определения стоимости каждой партии, когда два игрока играют, например, на три партии и каждым вложено в игру по 32 пистоля.

Предположим, что один выиграл две партии, а другой – одну. Они играют еще одну партию, если ее выигрывает первый, то он получает всю сумму в 64 пистоля…; если же эту партию выигрывает второй, то каждый игрок будет иметь две выигранные партии, и, следовательно, если они намерены произвести раздел, каждый должен получить обратно свой вклад в 32 пистоля.

Примите же во внимание, монсеньер, что если первый выиграет, то ему причитается 64; если он проиграет, то ему причитается 32. Если же игроки не намерены рисковать… и хотят произвести раздел, то первый должен сказать : «Я имею 32 пистоля верных, ибо в случае проигрыша я их также получил бы, но остальные 32 пистоля могут быть получены либо мной, либо Вами. Случайности равны. Разделим же эти 32 пистоля пополам, и дайте мне , кроме того, бесспорную сумму в 32 пистоля». Как видно из рассуждений Паскаля, первый игрок должен получить 48 пистолей, а второй - 16».

Как разделить ставку при игре трех выигрышных партий, если один игрок выиграл две партии, а другой – ни одной и каждым вложено в игру по 32 пистоля ?

Решение.

Ответы, предложенные паскалем, таковы: первый игрок должен получить 56 пистолей, а второй – 8. рассуждения при решении подобны тем, которые были проведены при решении предыдущей задачи: если бы первый игрок выиграл еще одну партию, то ему причиталось бы 64 пистоля, если бы проиграл – 48 пистоля, а остаток 16 делится поровну.

Как разделить ставку при игре трех выигрышных партий, если первый игрок выиграл одну партию, а второй- ни одной и каждым вложено в игру по 32 пистоля ?

Решение.

Пусть игроки сыграют еще одну партию. Если ее выиграет первый, то он будет иметь , как и в предыдущем случае, 56 пистолей. Если он ее проиграет, то у обоих окажется по одной выигрышной партии и первому следует получить 32 пистоля. Первый игрок может сказать: «Если вы не хотите играть эту партию, дайте мне мой бесспорный выигрыш в 32 пистоля, а остаток от 56 пистоля разделим поровну…то есть возьмем каждый по 12 пистолей, что с 32 пистолей составит 44 пистоля». Значит, первый игрок должен получить 44 пистоля, а второй – 20 пистолей.

Для случая, когда первый игрок выиграл одну партию, а второй – ни одной, Паскаль приводит формулу W=A+A\*(1\*3\*5\*...\*(2n-1))/(2\*4\*6\*...2n), где А – ставка каждого игрока, а W – ожидание выигрыша первого игрока.

Как видно, во всех случаях Паскаль делит ставку пропорционально вероятности выигрыша при продолжении игры. Оригинальный метод Паскаля трудно применить к более сложным случаям.

**Задачи Пьеро Ферма.** Пусть до выигрыша всей встречи игроку А недостает двух партий, а игроку В – трех. Как справедливо разделить ставку, если игра прервана?

Решение. Письмо Ферма , в котором он излагает свой метод решения, не сохранилось, но его можно восстановить из ответного письма Паскаля от 24 августа 1654 года. Рассуждение Ферма сводится к следующему. Игра может быть продолжена максимум еще 4 партии. Для перебора всех возможных случаев Ферма составляет таблицу, где выигрыши партий игроками А и В обозначены соответственно буквами а и в. Из 16 возможных исходов первые 11 благоприятны для выигрыша игроком А всей встречи, а остальные 5 исходов благоприятны для игрока В. следовательно, 11/16 ставки должен получить игрок А, а игрок В – 5/16. Как видно, Ферма предлагает разделить ставку пропорционально вероятностям выигрыша всей встречи.

Паскаль решает эту задачу на основе изучения свойств арифметического треугольника, приведенного в его «Трактате об арифметическом треугольнике», опубликованном посмертно в Париже в 1665 году. Он складывает количество партий, недостающих игрокам А (2) и В (3) берет ту строку треугольника (рис. 1), в котором количество членов равно найденной сумме, то есть пятую.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

Рис. 1.

Тогда доля игрока А будет равна сумме членов найденной строки, начиная от единицы, причем количество слагаемых равно числу партий, недостающих игроку В (3), а доля игрока В равна такой же сумме, но с количеством слагаемых, равном числу партий, недостающих игроку А (2). Выписываем строку, в котором находятся пять чисел. Это будет 1, 4, 6, 4, 1. следовательно, ставку нужно разделить в отношении 11:5. при таком решении ставка делится пропорционально вероятностям выиграть всю ставку для игроков А и В.

То есть, правило Паскаля состоит в следующем : пусть игроку А до выигрыша всей игры не хватает m партий , а игроку В – n партий, тогда ставка должна делиться между игроками в отношении .

Пусть до выигрыша всей встречи игроку А недостает одного очка, а двум другим (В и С) недостает по два очка. Как справедливо разделить ставки?

Решение. Перебор всех возможных случаев можно представить таблицей.

При рассмотрении такой таблицы Паскаль допустил неточность в рассуждениях, считая, что из 27 возможных исходов бесспорно благоприятствуют игроку А лишь 13, а исходы пятого, одиннадцатого, девятнадцатого столбцов благоприятствуют сразу и игроку А и игроку В (аналогичные исходы девятого, пятнадцатого, двадцать четвертого столбцов благоприятствуют игроку А и игроку С). Поэтому доли игроков в этих случаях следует брать с половинным весом. В результате Паскаль ошибочно предлагал делить ставку в отношении 16:  вместо 17:5:5.

**Задачи о гаданиях.**

По преданию, когда – то в сельских местностях России среди девушек существовало гадание. Одна из подруг зажимала в руке шесть травинок так, чтобы концы травинок торчали сверху и снизу, а другая связывала эти травинки попарно между собой сверху и снизу. Если при этом все шесть травинок оказывались связанными в одно кольцо, то это должно было означать, что девушка в текущем году выйдет замуж.

**Задача (для самостоятельного решения).**

Какова вероятность того, что травинки при завязывании наудачу образуют кольцо?

**Ответ.** 8/15.

**Приложение 2**

**История развития теории вероятностей**

Начало систематического исследования задач, относящимся к массовым случайным явлениям, и появление соответствующего математического аппарата относятся к XVII веку. В начале XVII века знаменитыйфизик *Галилей* уже пытался подвергнуть научному исследований ошибки физических измерений, рассматривая их как случайные и оценивая их вероятности. К этому же времени относятся первые попытки создания общей теории страхования, основанной на анализе закономерностей в таких массовых случайных явлениях, как заболеваемость, смертность, статистика несчастных случаев и т. д. Необходимость создания математического аппарата, специально приспособленного для анализа случайных величин, вытекала и из потребностей обработки и обобщения обширного статистического материала во всех областях науки.

Однако теория вероятностей как математическая наука сформировалась, в основном, не на материале указанных выше задач: эти задачи слишком сложны; в них законы, управляющими случайными явлениями, проступают недостаточно отчетливо и затушеваны многими осложняющими факторами. Необходимо было сначала изучить закономерности случайных явлений на более простом материале. Таким материалом исторически оказались "азартные игры". Эти игры с незапамятных времен создавались рядом поколений именно так, чтобы в них исход опыта был независим от поддающихся наблюдению условий опыта, был чисто случайным. Само слово "азарт" (фр. "lehasard") означает "случай". Схемы азартных игр дают исключительные по простоте и прозрачности моделей случайных явлений, позволяющие в наиболее отчетливой форме наблюдать и изучать управляющие ими специфические законы; а возможность неограниченно повторять один и тот же опыт обеспечивает экспериментальную проверку этих законов в условии действительной массовости явлений. Вплоть до настоящего времени примеры из области азартных игр и аналогичные им задачи на "схему урн" широко употребляются при изучении теории вероятностей как упрощенной модели случайных явлений, иллюстрирующие в наиболее простом и наглядном виде основные законы и правила теории вероятностей.

Возникновение теории вероятностей в современном смысле слова относится к середине XVII века и связано с исследованиями *Паскаля (1623-1662), Ферма (1601-1665) и Гюйгенса (1629-1695)* в области теории азартных игр. В этих работах постепенно сформировались такие важные понятия, как вероятность и математическое ожидание; были установлены их основные свойства и приемы их вычисления. Непосредственное практическое применение вероятностные методы нашли прежде всего в задачах страхования. Уже с конца XVII векастрахование стало производится на научной математической основе. С тех пор теория вероятностей находит все более широкое применение в различных областях.

До конца XVII века наука так и не подошла к введению классического определения вероятности, а продолжала оперировать только с числом шансов, благоприятствующих тому или иному событию. В 30 – е годы XVIII столетия классическое понятие вероятности стало общеупотребимым.

Крупный шаг вперед в развитии теории вероятностей связан с работами *Якова Бернулли (1654-1705).* Ему принадлежит первое доказательство одного из важнейших положений теории вероятностей – так называемый закон больших чисел, а также в трактовке Бернулли “ Искусств предположений “ присутствуют уже обе концепции вероятности – классическая и статистическая, обе они изложены не очень четко, но существенно то, что они уже введены в рассмотрения и использования.

Еще до Якова Бернулли многие отмечали как эмпирический факт ту особенность случайных явлений, которую можно назвать " свойством устойчивости частот при большом числе опытов". Было неоднократно отмечено, что при большом числе опытов, исход каждого из которых является случайным, относительная частота появлений каждого данного исхода имеет тенденцию стабилизироваться, приближаясь к некоторому специальному числу – вероятности этого исхода. Например, если много разбросать монету, относительная частота появления герба приближается к; при многократном бросании игральной кости частота появления грани с пятью очками приближается к  и т. д. Яков Бернулли - простейшая форма закона больших чисел – устанавливает связь между вероятностью события и частотой его появления; при достаточно большом числе опытов можно с практической достоверностью ожидать сколь угодно близкого совпадения частот с вероятностью.

Однако уже в первой половине XVIII века выяснилось, что классическое понятие вероятности имеет ограниченную область применения и возникают ситуации, когда оно не действует, а потому необходимо его расширение. Таким толчком послужили работы французского естествоиспытателя *Ж. Бюффона ( 1707 – 1788 )*, в которой он сформулировал знаменитую задачу о бросании иглы на разграфленную плоскость и предложил ее решение.

В XX веке интерес к геометрической вероятности не ослабел, а вырос, поскольку, помимо чисто математического интереса, они приобрели и серьезное прикладное значение в физике, биологии, медицине, инженерном деле и др.

Другой важный этап в развитии теории вероятностей связан с именем *Моавра (1667-1754).* Этот ученый впервые ввел в рассмотрение и для простейшего случая обосновал своеобразный закон, очень часто наблюдаемый в случайных явлениях: так называемый нормальный закон (иначе – закон Гаусса). Нормальный закон, как мы увидим далее, играет исключительно важную роль в случайных явлениях. Теоремы, обосновавшие этот закон для тех или иных условий, носят в теории вероятностей общее название "центральной предельной теоремы".

Выдающаяся роль в развитии теории вероятностей принадлежит знаменитому математику *Лапласу (1749-1827).* Он впервые дал стройное и систематическое изложение основ теории вероятностей, дал доказательство одной из форм центральной предельной теоремы (теорема Моавра - Лапласа) и развил ряд замечательных приложений теории вероятностей к вопросам практики, в частности к анализу ошибок наблюдений и измерений.

Значительный шаг вперед в развитии теории вероятностей связан с именем *Гаусса (1777-1855)*, который дал еще более общее обоснование нормальному закону и и разработал метод обработки экспериментальных данных, известный под названием " метода наименьших квадратов". Следует также отметить работы *Пуассона (1781-1840),* доказавшего более общую, чем у Якова Бернулли, форму закона больших чисел, а также впервые применившего теорию вероятностей к задачам стрельбы. С именем Пуассона связан один из законов распределения, играющий большую роль в теории вероятностей и ее приложениях.

Для всего XVIII и начала XIX века характерны бурное развитие теории вероятностей и повсеместное увлечение ею. Теории вероятностей становится "модной" наукой. Ее начинают применять не только там, где это применение правомерно, но и там, где оно ничем не оправдано. Для этого периода характерны многочисленные попытки применить теории вероятностей к изучению общественных явлений, к так называемым "моральным" и "нравственным" наукам. Во множестве появились работы, посвященные работам судопроизводства, истории, политики, даже богословия, в которых применялся аппарат теории вероятностей. Для всех этих псевдонаучных исследований характерен чрезвычайно упрощенный, механический подход к рассматриваемых в них общественным явлениям. В основу рассуждения полагаются некоторые произвольно заданные вероятности ( например, при рассмотрении вопросов судопроизводства склонность каждого человека к правде или лжи оценивается некоторой постоянной, одинаковой для всех людей вероятностью), и далее общественная проблема решается как простая арифметическая задача. Естественно, что все подобные попытки были обречены на неудачу и не могли сыграть положительную роль в развитии науки. Напротив, их косвенным результатом оказалось то, что примерно в 20-х – 30-х годах XIX века в Западной Европе повсеместное увлечение теорией вероятностей сменилось разочарованием и скептицизмом. На теории вероятностей стали смотреть как на науку сомнительную, второсортную, род математического развлечения, вряд ли достойную серьезного изучения.

Замечательно, что именно в это время в Росси создается та знаменитая Петербургская математическая школа, трудами которой теории вероятностей была поставлена на прочную логическую и математическую основу и сделана надежным, точным и эффективным методом познания. Со времени появления этой школы развитие теории вероятностей уже теснейшим образом связано с работами русских, а в дальнейшем – советских ученых.

Среди ученых Петербургской математической школы следует назвать *В. Я. Буняковского (1804-1889)* – автора первого курса теории вероятностей на русском языке, создателя современной русской терминологии в теории вероятностей, автора оригинальных исследований в области статистики и демографии.

Учеником В. Я. Буняковского был великий русский математик *П. Л. Чебышев (1821-1894).* Среди обширных и разнообразных математических трудов П. Л. Чебышев заметное место занимают его труды по теории вероятностей. П. Л. Чебышеву принадлежит дальнейшее расширение и обобщение закона больших чисел. Кроме того, П. Л. Чебышев ввел в теорию вероятностей весьма мощный и плодотворный метод моментов.

Учеником П. Л. Чебышева был *А. А. Марков (1856-1922),* также обогативший теорию вероятностей открытиями и методами большой важности. А. А. Марков существенно расширил область применения закона больших чисел и центральной предельной теоремы, распространив их не только на независимые, но и на зависимые опыты. Важнейшей заслугой А. А. Маркова явилось то, что он заложил основы совершенно новой ветви теории вероятностей – теории случайных, или "стохастических", процессов. Развитие этой теории составляет основное содержание новейшей, современной теории вероятностей.

Учеником П. Л. Чебышева был *А. М. Ляпунов (1857-1918),* с именем которого связано первое доказательство центральной предельной теоремы при чрезвычайно общих условиях. Для доказательства своей теоремы А. М. Ляпунов разработал специальный метод характеристических функций, широко применяемых в современной теории вероятностей.

Характерной особенностью работ Петербургской математической школы была исключительная четкость постановки задач, полная математическая строгость применяемых методов и наряду с этим тесная связь теории с непосредственными требовании практики. Трудами ученых Петербургской математической школы теория вероятностей была выведена с задворок науки и поставлена как полноправный член в ряд точных математических наук. Условия применения ее методов были строго определены, а самые методы доведены до высокой степени совершенства.

Современное развитие теории вероятностей характерно всеобщим подъемом интереса к ней и резким расширением круга ее практических применений. За последние десятилетия теория вероятностей превратилась в одну из наиболее быстро развивающихся наук, теснейшим образом связанную с потребностями практики и техники. Советская школа теории вероятностей, унаследовала традиции Петербургской математической школы, занимает в мировой науке ведущее место.

Здесь мы назовем только некоторых крупнейших советских ученых, труды которых сыграли решающую роль в развитии современной теории вероятностей и ее практических приложений.

*А. Я. Хинчин (1893-1959)* известен своими исследованиями в области дальнейшего обобщения и усиления закона больших чисел, но главным образом своими исследованиями в области так называемых стационарных случайных процессов.

До недавнего времени теория вероятностей представляла собой еще не сложившуюся математическую науку, в которой основные понятия были недостаточно четко определены. Естественно, что приложения теории вероятностей к изучению явлений природы были слабо обоснованы и встречали порой резкую критику. Однако эти обстоятельства мало смущали естествоиспытателей, и их наивных теоретико-вероятностных подходов в различных областях науки приводило к крупным успехам. Развитие естествознания в начале прошлого столетия предъявило к теории вероятностей повышенные требования. Возникла необходимость в систематическом изучении основных понятий теории вероятностей и выяснении тех условий, при которых возможно использование ее результатов. Вот почему особенно важное значение приобрело формально- логическое обоснование теории вероятностей, ее аксиоматическое построение. При этом в основу теории вероятностей как математической науки должны быть положены предпосылки, являющиеся обобщением многовекового человеческого опыта.

В современной математике принято аксиомами называть те предположения, которые принимаются за истинные и в пределах данной теории не доказываются. Все остальные положения этой теории должны выводится чисто логическим путем из принятых аксиом. Формулировка аксиом, т.е. тех фундаментальных положений, на базе которых строится обширная теория, представляет собой не начальную стадию развития математической науки, а является результатом длительного накопления фактов и логического анализа полученных результатов с целью выявления действительно основных первичных фактов. Именно так складывались аксиомы геометрии, первоначальное знакомство с которыми дается в курсе элементарной математики. Подобный же путь прошла и теория вероятностей, в которой аксиоматическое построение ее основ явилось делом сравнительно недавнего прошлого. Впервые задача аксиоматического построения теории вероятностей как логически совершенной науки была поставлена и решена в *1917 году* известным математиком *С.Н. Бернштейном*, а также он существенно расширил область применения предельных теорем.. При этом С.Н. Бернштейн исходил из качественного сравнения случайных событий по их большей или меньшей вероятности.

Имеется иной подход, предложенный *А.Н.Колмогоровым*. этот подход тесно связывает теорию вероятностей с современной метрической теорией функций, а также теорией множеств. Аксиоматическое построение теории вероятностей отправляется из основных свойств вероятности, подмеченных на примерах классического и статистического определений. Аксиоматическое определение вероятности, таким образом, как частные случаи включает и классическое и статистическое определения и преодолевает недостаточность каждого из них. На этой базе удалось построить логически совершенное здание современной теории вероятностей и в то же время удовлетворить повышенные требования к ней современного естествознания.

А.Н. Колмогоров дал наиболее совершенное аксиоматическое построение теории вероятностей, связав ее с одним из важнейших разделов современной математики – метрической теории функций. Особое значение имеют работы А. Н. Колмогорова в области теории случайных функций (стохастических процессов), которые в настоящее время основой всех исследований в данной области. Работы А. Н. Колмогорова, относящиеся к оценке эффективности легли в основу целого нового научного направления в теории стрельбы, переросшего затем в более широкую науку об эффективности боевых действий.

*В. И. Романовский (1879-1954)* и *Н. В. Смирнов* известны своими работами в области математической статистики, *Е. Е. Слуцкий (1880-1948)* – в теории случайных процессов, *Б. В. Гнеденко* – в области теории массового обслуживания, *Е. Б. Дынкин* – в области марковских случайных процессов, *В. С. Пугачев* – в области случайных процессов в применении к задачам автоматического управления.

Развитие зарубежной теории вероятностей в настоящее время также идет усиленными темпами в связи с настоятельными требовании практики. Преимущественным вниманием пользуются, как и нас, вопросы, относящиеся к случайным процессам. Значительные работы в этой области принадлежат, например, *Н. Винеру, В. Феллеру, Д. Дубу*. Важные работы по теории вероятностей и математической статистики принадлежат *Р. Фишеру, Д. Нейману и Г. Крамеру.*

За последние годы мы стали свидетелями рождения новых и своеобразных методов прикладной теории вероятностей, появление которых связано со спецификой исследуемых технических проблем. Речь идет, в частности, о таких дисциплинах, как "теория информации" и "теория массового обслуживания". Возникшие из непосредственных потребностей практики, эти разделы теории вероятностей приобретают общее теоретическое значение, а круг их приложения постоянно увеличивается

Связь теории вероятностей с практическими потребностями, как уже было отмечено, была основной причиной бурного развития ее в последние десятилетия. Многие ее разделы были развиты как раз в связи с ответами на запросы практиков. Здесь кстати вспомнить слова основателя отечественной школы теории вероятностей П. Л. Чебышева

*"Сближение теории с практикой дает самые благотворные результаты, и не одна только практика от этого выигрывает; сами науки развиваются под влиянием ее: она открывает им новые предметы для исследования или новые стороны в предметах давно известных… если теория много выигрывает от новых приложений старой методы или от новых развитий ее, то она еще более приобретает открытием новых методов, и в этом случае наука находит себе верного руководителя в практике".*