Министерство образования Республики Беларусь

«Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»

Математический факультет

Кафедра МПМ

**Реферат**

Математические понятия

Исполнитель:

Студентка группы М- 32

Молодцова А.Ю.

Научный руководитель:

Канд. физ-мат. наук, доцент

Лебедева М.Т.

Гомель 2007

# Введение

Формулировки многих определений (теорем, аксиом) учащимся понятны, легко запоминаются после небольшого числа повторений, поэтому целесообразно в начале предложить их запомнить, а затем научить применять к решению задач.

Метод, при котором процессы запоминания определений и формирования навыков их применения протекают у учащихся неодновременно (раздельно), называют *раздельным.*

Раздельный метод используется при изучении определений хорды, трапеции, чётной и нечётной функции, теорем Пифагора, признаков параллельности прямых, теоремы Виета, свойств числовых неравенств, правил умножения обыкновенных дробей, сложения дробей с одинаковыми знаменателями и т.д.

# 1. Объём и содержание понятия. Классификация понятий

Объекты реальной действительности обладают: а) едиными свойствами, выражающими его отличительные свойства (например, уравнение третьей степени с одной переменной – кубическое уравнение); б) общими свойствами, которые могут быть отличительными, если выражают существенные свойства объекта (его признаки), выделяющие его из множества других объектов.

Термин “понятие” используется для обозначения мысленного образа некоторого класса объектов, процессов. Психологи выделяют три формы мышления:

1) понятиями (например, медиана – отрезок, соединяющий вершину с противоположной стороной треугольника);

2) суждениями (например, для углов произвольного треугольника справедливо: );



3) умозаключениями (например, если a>b и b>c, то a>c).

Характерными для *формы мышления понятиями* являются: а) это продукт высокоорганизованной материи; б) отражает материальный мир; в) предстаёт в познании как средство обобщения; г) означает специфически человеческую деятельность; д) его формирование в сознании неотделимо от его выражения посредством речи, записи или символа.

Математическое понятие отражает в нашем мышлении определённые формы и отношения действительности, абстрагированные от реальных ситуаций. Их формирование происходит по схеме:



Каждое понятие объединяет множество объектов или отношений, называемое *объёмом понятия*, а характеристические свойства, присущие всем элементам этого множества и только им, выражающие *содержание понятия.*

Например, математическое понятие – четырёхугольник. Его *объём*: квадрат, прямоугольник, параллелограмм, ромб, трапеция и т.д. *Содержание:* 4 стороны, 4 угла, 4 вершины (характеристические свойства).

Содержание понятия жёстко определяет его объём и, наоборот, объём понятия вполне определяет его содержание. Переход от чувственной ступени к логической происходит посредством *обобщения:* либо через выделение общих признаков объекта (параллелограмм – четырёхугольник - многоугольник); либо через общие признаки в сочетании с особенными или единичными, которое приводит к конкретному понятию.

В процессе обобщения объём расширяется, а содержание сужается. В процессе специализации понятия объём сужается, я содержание расширяется.

Например:

многоугольники – параллелограммы;

треугольники – равносторонние треугольники.

Если объём одного понятия содержится в объёме другого понятия, то второе понятие называется *родовым*, по отношению к первому; а первое называется *видовым* по отношению ко второму. Например: параллелограмм – ромб (род)(вид).

Процесс выяснения объёма понятия называется *классификацией*, схема которой выглядит так:

пусть дано множество и некоторое свойство и пусть в есть элементы, как обладающие, так и не обладающие этим свойством. Пусть:



; и , 0.



Выделим в новое свойство и проведём разбиение по этому свойству:



, , где ,



Например: 1) классификация числовых множеств, отражающих развитие понятия числа; 2) классификация треугольников: а) по сторонам; б) по углам.

**Задача №1.** Множество треугольников изобразим с помощью точек квадрата.

- свойство равнобедренности;

- свойство прямоугольности;

Существуют ли треугольники, обладающие этими свойствами одновременно?

# 2. Математические определения. Типы ошибок в определении понятий

Заключительный этап формирования понятия – его *определение*, т.е. принятие условного соглашения. *Под определением понимается перечисление необходимых и достаточных признаков понятия, сведённых в связное предложение (речевое или символическое).*

**2.1 Способы определения понятий**

Первоначально выделяют неопределяемые понятия, на основании которых определяются математические понятия следующими способами:

1) через ближайший род и видовое отличие: а) *дескриптивное* (выясняющее процесс, при помощи которого определение построено, или описывающее внутреннее строение в зависимости от тех операций, при помощи которых данное определение было построено из неопределяемых понятий); б) *конструктивное* (или *генетическое*), указывающее происхождение понятия.

Например: а) прямоугольник – это параллелограмм, у которого все углы прямые; б) окружностью называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, равноудалённых от данной точки. Эта точка называется центром окружности.

2) индуктивно. Например, определение арифметической прогрессии:



3) через абстракцию. Например, натуральное число – характеристика классов эквивалентных конечных множеств;

4) аксиоматическое (косвенное определение). Например, определение площади фигуры в геометрии: для простых фигур площадь – это положительная величина, численное значение которой обладает следующими свойствами: а) равные фигуры имеют равные площади; б) если фигура разбивается на части, являющиеся простыми фигурами, то площадь этой фигуры равна сумме площадей её частей; в) площадь квадрата со стороной, равной единице измерения, равна единице.

**2.2 Явные и неявные определения**

Определения подразделяются на:

а) *явные*, в которых чётко выделены определяемое и определяющие понятия (например, определение через ближайший род и видовое отличие);

б) *неявные*, которые строятся по принципу замены одного понятия другим с более широким объёмом и окончание цепочки есть неопределяемое понятие, т.е. формально-логическое определение (например, квадрат – ромб с прямым углом; ромб – параллелограмм с равными смежными сторонами; параллелограмм – четырёхугольник, с попарно параллельными сторонами; четырёхугольник – фигура, состоящая из 4 углов, 4 вершин, 4 сторон). В школьных определениях чаще всего практикуется первый способ, схема которого такова: имеем множества и некоторое свойство тогда



где , ;



Основное требование при построение определений: определяемое множество должно быть подмножеством минимального множества. Например, сравним два определения: (1) Квадрат есть ромб с прямым углом; (2) Квадрат есть параллелограмм с равными сторонами и прямым углом (избыточное).

Всякое определение есть решение задачи на “доказательство существования”. Например, прямоугольный треугольник есть треугольник с прямым углом; его существование – построение.

**2.3 Характеристика основных типов ошибок**

Отметим типичные ошибки, которые встречаются у учащихся при определении понятий:

1) использование не минимального множества в качестве определяющего, включение логически зависимых свойств (характерно при повторении материала).

Например: а) параллелограмм – четырёхугольник, у которого противоположные стороны равны и параллельны; б) прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она, пересекаясь с этой плоскостью, образует прямой угол с каждой прямой, проведённой на плоскости через точку пересечения, вместо: “прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она перпендикулярна ко всем прямым этой плоскости”;

2) использование определяемого понятия и в качестве определяющего.

Например, определяется прямой угол не как один из равных смежных углов, а как углы с взаимно перпендикулярными сторонами;

3) тавтология – определяется понятие через само это понятие.

Например, две фигуры называются подобными, если они переводятся одна в другую преобразованием подобия;

4) иногда в определении указывается не то определяющее множество, из которого выделяется определяемое подмножество.

Например, “медиана есть прямая …” вместо ”медиана есть отрезок, соединяющий…”;

5) в определениях, даваемых учащимися, иногда совсем отсутствует определяемое понятие, что возможно лишь тогда, когда учащиеся не приучены давать полные ответы.

Методика исправления ошибок в определениях предполагает, первоначально, выяснения сути допущенных ошибок, а затем предупреждение их повторения.

# 3. Структура определения

Знание определения не гарантирует усвоения понятия. Методическая работа с понятиями должна быть направлена на преодоление формализма, который проявляется в том, что учащиеся не могут распознать определяемый объект в различных ситуациях, где он встречается.

Распознавание объекта, соответствующего данному определению, и построение контрпримеров возможно лишь при ясном представлении о структурах рассматриваемого определения, под которой в схеме определения () понимают структуру правой части.



1) *Конъюнктивная структура*: две точки и называются симметричными относительно прямой p(*A*(*x*)), если эта прямая p перпендикулярна отрезку и проходит через его середину. Будем также считать, что каждая точка прямой р симметрична себе относительно прямой р (наличие союза “и”) (\* - “Биссектрисой угла называется луч, который исходит из его вершины, проходит между его сторонами и делит угол пополам”).



2) *Конструктивная структура*: “Пусть - данная фигура и р – фиксированная прямая. Возьмём произвольную точку фигуры и опустим перпендикуляр на прямую р. На продолжение перпендикуляра за точку отложим отрезок , равный отрезку . Преобразование фигуры в фигуру , при котором каждая точка переходит в точку , построенную указанным образом, называют симметрией относительно прямой р.”



3) *Дизъюнктивная структура*: определение множества **Z** целых чисел можно записать на языке свойств в виде  **Z N** или **N** или =0, где **N -** множество чисел, противоположных натуральным.



# 4. Характеристика основных этапов изучения математических понятий

Методика работы над определением предполагает: 1) знание определения; 2) обучение распознавания объекта, соответствующего данному определению; 3) построение различных контрпримеров. Например, понятие “прямоугольный треугольник” и работа по распознаванию его составных элементов:

Изучение математических определений можно подразделить на три этапа:

1-й этап – введение – создание на уроке ситуации, когда учащиеся либо сами “открывают” новое, самостоятельно формируют для них определения, либо просто подготавливаются к их пониманию.

2-й этап – обеспечение усвоения – сводится к тому, чтобы школьники:

а) научились применять определение;

б) быстро и безошибочно запоминать их;

в) понимали каждое слово в их формулировках.

3-й этап – закрепление – осуществляется на последующих уроках и сводится к повторению их формулировок и обработке навыков применения к решению задач.

Ознакомление с новыми понятиями проводятся:

1 способ: учащиеся подготавливаются к самостоятельному формированию определения.

2 способ: учащиеся готовятся к сознательному восприятию, пониманию нового математического предложения, формулировка которого им сообщается затем в готовом виде.

3 способ: учитель сам формулирует новое определение без какой-либо подготовки, а затем сосредотачивает усилия учащихся на их усвоении и закреплении.

1 и 2 способ представляют эвристический метод, 3 способ – догматический. Использование любого из способов должно соответствовать уровню подготовленности класса и опыта учителя.

# 5. Характеристика приемов введения понятий

Возможны следующие приёмы при введении понятий:

1) можно составить такие упражнения, которые позволяют учащимся быстро сформулировать определение нового понятия.

Например: а) Выписать несколько первых членов последовательности (), у которой =2, . Такая последовательность называется геометрической прогрессией. Попытайтесь сформулировать её определение. Можно ограничиться подготовкой к восприятию нового понятия.



б) Выписать несколько первых членов последовательности (), у которой =4, Далее учитель сообщает, что такая последовательность называется арифметической прогрессией и сам сообщает её определение.



2) при изучении геометрических понятий упражнения формулируются таким образом, чтобы учащиеся построили сами необходимую фигуру и смогли выделить признаки нового понятия, необходимые для формулировки определения.

Например: постройте произвольный треугольник, соедините отрезком его вершину с серединой противоположной стороны. Такой отрезок называется медианой. Сформулируйте определение медианы.

Иногда предлагается составить модель либо, рассматривая готовые модели и чертежи, выделить признаки нового понятия и сформулировать его определение.

Например: введено в 10 классе определение параллелепипеда. По предложенным моделям наклонного, прямого и прямоугольного параллелепипедов выделить признаки, по которым эти понятия различаются. Сформулировать соответствующие определения прямого и прямоугольного параллелепипедов.

3) Многие алгебраические понятия вводятся на основании рассмотрения частных примеров.

Например: графиком линейной функции является прямая.

4) Метод целесообразных задач, (разработан С.И. Шохором-Троцким) С помощью специально подобранной задачи учащиеся приходят к выводу о необходимости введения нового понятия и целесообразности придания ему именно такого смысла, который оно уже имеет в математике.

В 5-6 классах таким методом вводятся понятия: уравнение, корень уравнения, решение неравенств, понятие действий сложения, вычитания, умножения, деления над натуральными числами, десятичными и обыкновенными дробями и т.д.

***Конкретно-индуктивный метод***

Сущность:

а) рассматриваются конкретные примеры;

б) выделяются существенные свойства;

в) формулируется определение;

г) выполняются упражнения: на распознавание; на конструирование;

д) работа над свойствами, не включёнными в определение;

е) применение свойств.

Например: тема – параллелограммы:

а)

4

3

2

1

7

6

5

1, 3, 5 – параллелограммы.

б) существенные признаки: четырёхугольник, попарная параллельность сторон.

в) распознавание, построение:

г) найти (построить) четвёртую вершину параллелограмма (\* - задача №3, ст.96, Геометрия 7-11 класс: Сколько можно построить параллелограммов с вершинами в трёх заданных точках, не лежащих на одной прямой? Постройте их.).

д) другие свойства:

AC и BD пересекаются в точке О и АО=ОС, ВО=ОD; АВ=СD, AD=BC.

е) А=С, В=D.



B

O

AD

Закрепление: решение задач №4-23, стр.96-97, Геометрия 7-11, Погорелов.

Перспективное значение:

а) используется при изучении и определении прямоугольника и ромба;

б) принцип параллельности и равенства отрезков, заключённых между параллельными прямыми в теореме Фалеса;

в) понятие параллельного переноса (вектора);

г) свойство параллелограмма используется при выводе площади треугольника;

д) параллельность и перпендикулярность в пространстве; параллелепипед; призма.

***Абстрактно-дедуктивный метод***

Сущность:

а) определение понятия: - квадратное уравнение;



б) выделение существенных свойств: х – переменная; a, b, c – числа; а≠0 при



в) конкретизация понятия: - приведенное; примеры уравнений



г) упражнения: на распознавание, на конструирование;

д) изучение свойств, не включённых в определение: корни уравнения и их свойства;

е) решение задач.

В школе абстрактно-дедуктивный способ применяется тогда, когда новое понятие полностью подготовлено изучением предыдущих понятий, в том числе изучением ближайшего родового понятия, а видовое отличие нового понятия весьма простое и понятное учащимся.

Например: определение ромба после изучения параллелограмма.

Кроме того, указанный метод используется:

1) при составлении “родословной” определения понятия:

Квадрат – это прямоугольник, у которого все стороны равны.

Прямоугольник – это параллелограмм, у которого все углы прямые.

Параллелограмм – это четырёхугольник, у которого противолежащие стороны параллельны.

Четырёхугольник – фигура, которая состоит из четырёх точек и четырёх последовательно соединяющих их отрезков.

Иначе говоря, родословная представляет собой цепочку понятий, построенных через обобщения предыдущего понятия, финалом которой является неопределяемое понятие (напомним, что в курсе школьной геометрии к таковым относятся точка, фигура, плоскость, расстояние (лежать между));

2) классификация;

3) применяется к доказательствам теорем и решению задач;

4) широко используется в процессе актуализации знаний.

Рассмотрим этот процесс, представленный системой задач:

а) Дан прямоугольный треугольник со сторонами 3см и 4см. Найти длину медианы, проведённой к гипотенузе.

б) Доказать, что медиана, проведённая из вершины прямого угла треугольника, равна половине гипотенузы.

в) Доказать, что в прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит пополам угол между медианой и высотой, проведёнными к гипотенузе.

г) На продолжении наибольшей стороны АС треугольника АВС отложен отрезок СМ, равный стороне ВС. Доказать, что АВМ тупой.



В большинстве случаев в школьном преподавании применяется конкретно-индуктивный способ. В частности, таким методом вводятся понятия в пропедевтических циклах начал алгебры и геометрии в 1-6 классах, причём многие определяющие понятия вводятся описательно, без строгих формулировок.

Незнание учителем различных методов введения определений приводит к формализму, который проявляется следующим образом:

а) учащиеся затрудняются применить определения в непривычной ситуации, хотя и помнят его формулировку.

Например: 1) считают функцию - чётной, т.к. “cos” – чётная;



2) - не понимают связь между монотонностью функции и решением неравенства, т.е. не могут применять соответствующие определения, в которых основной приём исследования состоит в оценке знака разности значений функции, т.е. в решении неравенства.



б) учащиеся обладают навыками решения задач какого-либо типа, но не могут объяснить, на основании каких определений, аксиом, теорем они выполняют те или иные преобразования.

Например: 1) - преобразовать согласно этой формуле и 2) представьте, что на столе – модель четырёхугольной пирамиды. Какой многоугольник будет основанием этой пирамиды, если модель положить на стол боковой гранью? (четырёхугольник).



Процесс формирования знаний, умений и навыков не ограничивается сообщением новых знаний.

Эти знания должны быть усвоены и закреплены.

# 6. Методика обеспечения усвоения математических понятий (предложений)

1. Формулировки многих определений (теорем, аксиом) учащимся понятны, легко запоминаются после небольшого числа повторений, поэтому целесообразно в начале предложить их запомнить, а затем научить применять к решению задач.

Метод, при котором процессы запоминания определений и формирования навыков их применения протекают у учащихся неодновременно (раздельно), называют *раздельным.*

Раздельный метод используется при изучении определений хорды, трапеции, чётной и нечётной функции, теорем Пифагора, признаков параллельности прямых, теоремы Виета, свойств числовых неравенств, правил умножения обыкновенных дробей, сложения дробей с одинаковыми знаменателями и т.д.

Методика:

а) учитель формулирует новое определение;

б) учащиеся класса для запоминания повторяют его 1-3 раза;

в) отрабатывается на упражнениях.

2. *Компактный* метод состоит в том, что учащиеся читают по частям математическое определение или предложение и по ходу чтения одновременно выполняют упражнение.

Читая формулировку несколько раз, они попутно запоминают её.

Методика:

а) подготовка математического предложения к применению. Определение разбивается на части по признакам, теорема – на условие и заключение;

б) образец действий, предлагаемый учителем, который показывает, как работать с подготовленным текстом: читаем его по частям и одновременно выполняем упражнения;

в) учащиеся по частям читают определение и одновременно выполняют упражнения, руководствуясь подготовленным текстом и образцом учителя;

Например: определение биссектрисы в пятом классе:

1) введение понятия проводится методом целесообразных задач на модели угла;

2) выписывается определение: “Луч, выходящий из вершины угла и делящий его на две равные части, называется биссектрисой угла ”;

3) выполняется задание: указать, какие из линий на чертежах являются биссектрисами углов (равные углы обозначаются одинаковым числом дуг).

На одном из чертежей учитель показывает применение определения (см. дальше);

4) работа продолжается учениками.

3. *Комбинация раздельного и компактного метода*: после вывода нового правила оно повторяется 2-3 раза, а затем учитель требует в процессе выполнения упражнений формулировать правило по частям.

4. *Алгоритмический метод* используется для формирования навыков применения математических предложений.

Методика: математические предложения заменяются алгоритмом. Читая поочередно указания алгоритма, ученик решает задачу. Таким образом у него формируется навык применения определения, аксиомы и теоремы. При этом допускается либо последующее заучивание определения, либо прочтение вместе с алгоритмом и самого определения.

Основные этапы метода:

а) подготовка к работе списка указаний, который либо дается в готовом виде, с последующим разъяснением, либо учащиеся подводятся к его самостоятельному составлению;

б) образец ответа учителя;

в) аналогичным образом работают ученики.

Раздельный и компактный методы применяются при изучении определений. Алгоритмический может быть применен только при изучении трудно усваиваемых определений (например, необходимые и достаточные условия). Наиболее широко алгоритмический метод используется при формировании навыков решения задач.

# 7. Методика закрепления математических понятий и предложений

1й приём:

учитель предлагает сформулировать и применить те или иные определения, аксиомы, теоремы, которые встречаются по ходу решения задач.

Например: построить график функции; определение четной (нечетной) функции; необходимое и достаточное условие существования.



2й приём:

учитель предлагает сформулировать ряд определений, теорем, аксиом во время фронтального опроса, с тем, чтобы повторить их и заодно проверить, помнят ли их ученики. Этот приём вне решения задач не эффективен. Возможно сочетать фронтальный опрос со специальными упражнениями, которые требуют от учащихся умения применять определения, теоремы, аксиомы в различных ситуациях, умения быстро ориентироваться в условии задачи.

# Заключение

Знание определения не гарантирует усвоения понятия. Методическая работа с понятиями должна быть направлена на преодоление формализма, который проявляется в том, что учащиеся не могут распознать определяемый объект в различных ситуациях, где он встречается.

Распознавание объекта, соответствующего данному определению, и построение контрпримеров возможно лишь при ясном представлении о структурах рассматриваемого определения, под которой в схеме определения () понимают структуру правой части.



## Литература

1. К.О. Ананченко «Общая методика преподавания математики в школе», Мн., «Унiверсiтэцкае», 1997 г.

2. Н.М. Рогановский «Методика преподавания в средней школе», Мн., «Высшая школа», 1990 г.

3. Г. Фройденталь «Математика как педагогическая задача», М., «Просвещение», 1998 г.

4. Н.Н. «Математическая лаборатория», М., «Просвещение», 1997 г.

5. Ю.М. Колягин «Методика преподавания математики в средней школе», М., «Просвещение», 1999 г.

6. А.А. Столяр «Логические проблемы преподавания математики», Мн., «Высшая школа», 2000 г.