Министерство образования Российской Федерации

Главное управление общего и профессионального образования

Администрации Иркутской области

Государственное образовательное учреждение

Среднего профессионального образования

Братский педагогический колледж №2

**КУРСОВАЯ РАБОТА**

Тема: ***Неевклидова геометрия***

Выполнил:

Студент 3 курса В группы

# Вощевоз Светлана Николаевна

Специальность:

***0301 «Математика»***

Руководитель:

# Савельева Екатерина Васильевна

## Преподаватель высшей квалификационной категории

### г. Братск, 2001

**Оглавление.**

1. Основные понятия в геометрии Евклида и в современной геометрии.
2. Аксиомы в «Началах» Евклида
3. Открытие неевклидовой геометрии.
4. Из истории неевклидовой геометрии.
5. Заключение.
6. Библиография.
7. Приложение.

Геометрия – это одна из древнейших наук. Исследовать различные пространственные формы издавна побуждало людей их практическая деятельность. Древнегреческий ученый Эвдем Родосский в IV веке до нашей эры писал: «Геометрия была открыта египтянами, и возникла при измерении Земли. Это измерение было им необходимо вследствие разлития реки Нил, постоянно смывавшей границы. Нет ничего удивительного, что эта наука, как и другие, возникла из потребности человека».

Многие первоначальные геометрические сведения получили также шумеро-вавилонские, китайские и другие ученые древнейших времен. Устанавливались они сначала только опытным путем, без логических доказательств.

Как наука, геометрия впервые сформировалась в Древней Греции, когда геометрические закономерности и зависимости, найденные ранее опытным путем, были приведены в надлежащую систему и доказаны.

В III веке до нашей эры греческий ученый Евклид привел в систему известные ему геометрические сведения в большом сочинении «Начала». Эта книга более двух тысяч лет служила учебником геометрии во всем мире.

В своей курсовой работе я хочу показать, что кроме геометрии, которую изучают в школе ( Геометрии Евклида или употребительной геометрии), существует еще одна геометрия, геометрия Лобачевского.

Эта геометрия существенно отличается от евклидовой, например, в ней утверждается, что через данную точку можно провести бесконечно много прямых, параллельных данной прямой, что сумма углов треугольника меньше 180 В геометрии Лобачевского не существует прямоугольников, подобных треугольников и так далее.

Неевклидова геометрия появилась вследствие долгих попыток доказать V постулат Евклида, аксиому параллельности. Эта геометрия во многом удивительна, необычна и соответствует нашим привычным представлениям о реальном мире. Но в логическом отношении данная геометрия не уступает геометрии Евклида.

Начала Евклида служили на протяжении более 2000 лет образцом строгого дедуктивного изложения геометрии.

Однако в 19 веке после открытия геометрии Лобачевского – Бояй, а затем геометрии Римана и в связи с пересмотром основ математического анализа, предпринятого Больцано, Каши, Абелем Гауссом и другими учеными, логическое построение «Начал» Евклида стало подвергаться критике. В системе построения было обнаружено много логических дефектов, часть которых была заменена еще в древности. Это касается в первую очередь основных понятий геометрии и евклидовых определений.

Определение нового понятия состоит в раскрытии его содержания в перечислении его существенных признаков (свойств) с помощью других ранее определенных понятий и т.д. В конце концов, мы должны дойти до некоторых, обычно самых простых и немногих понятий, которые являлись исходными, уже логически прямо не определяются, а принимают за основные понятия. Без выделения основных понятий операция логического определения всех других понятий вообще была бы бессмысленной.

Определения, изложенные в «Началах» Евклида, не удовлетворяют требованиям современной науки. Вот некоторые из 23 определений, которыми начинается первая книга «Начал».

1. Точка есть то, что не имеет частей (такое аналитическое определение точки, по- видимому, заимствовано Евклидом у предшественников и восходит к Демокриту).
2. Линия есть длина без ширины.
3. Границы линии суть точки.
4. Прямая есть такая линия, которая одинаково расположена по отношению ко всем своим точкам.
5. Поверхность есть то, что имеет только длину и ширину.
6. Границы поверхности суть линии.
7. Плоскость есть поверхность, которая одинаково расположена по отношению ко всем прямым, на ней лежащим.
8. Плоский угол есть взаимное наклонение двух встречающихся линий, расположенных в одной плоскости.

Такие определения нельзя считать логически конкретными. Во-первых, в

этих определениях употребляются такие понятия (часть, длина, ширина, граница и т.д.), которые сами должны быть определены. Во-вторых, идея основных понятий (в современном смысле) у Евклида вообще отсутствует. В-третьих, некоторые его определения туманны и непонятны, например, 4 и 7. Вообще же определения Евклида являются лишь описанием геометрических образов, и, как правило, для доказательства теорем он ими не пользовался.

При дедуктивном построении геометрии, как и любой другой науки, следует исходить не только из основных неопределенных понятий, но также из некоторых немногих и простых утверждений, то есть недоказуемых предложений, называемых иногда постулатами (требованиями), чаще же аксиомами (аксиома – греческое слово, означающее «бесспорное положение», а также «почитаемое»), с тем, чтобы, основываясь на них, можно было строго логически обосновать, то есть доказать все другие предложения, называемые уже теоремами (Этот термин был введен Аристотелем, его употреблял не Евклид, а его комментаторы. Первоначальный смысл этого греческого слова был «рассматриваемое»).

У Евклида постулаты и аксиомы, которые он не отождествлял (у него постулаты носят чисто геометрический характер) следуют за выше названными определениями. Вот они:

*Постулаты.*

1. Требуется, чтобы от каждой точки ко всякой другой точке можно было провести прямую линию.
2. И, чтобы каждую прямую можно было неопределенно продолжить.
3. И, чтобы из любого центра можно было описать окружность любым радиусом.
4. И, чтобы все прямые углы были равны.
5. И, чтобы всякий раз, когда прямая образует с ними внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых, эти прямые пересекались с той стороны, с которой эта сумма меньше двух прямых.

*Аксиомы.*

1. Равные порознь третьему равны между собой.
2. И если к равным прибавить равные, то получим равные.
3. И если от равных отнимем равные, то получим равные.
4. И если к неравным прибавим равные, то получим не равные.
5. И если удвоим равные, то получим равные.
6. И половины равных, равны между собой.
7. И совмещающиеся равны.
8. И целое больше части.
9. И две прямые не могут заключить пространства.

Важнейшим недостатком системы евклидовых аксиом, включая и его постулаты, является ее неполнота, то есть недостаточность их для строго логического построения геометрии, при котором каждое предложение, если оно не фигурирует в списке аксиом, должно быть логически выведено из последних. Поэтому Евклид при доказательстве теорем не всегда основывался на аксиомах, а прибегал к интуиции, к наглядности и «чувственным» восприятиям. Например, понятию «между» он приписывал чисто наглядный характер; он молчаливо предполагал, что прямая, проходящая через внутреннюю точку окружности, непременно должна пересечь ее в двух точках. При этом он основывался только на наглядности, а не на логике; доказательства этого факта он нигде не дал, и дать не мог, так как у него отсутствовали аксиомы непрерывности. Нет у него и некоторых других аксиом, без которых строго логическое доказательство теорем невозможно.

Критика евклидовского обоснования геометрии, продолжавшаяся на протяжении нескольких веков и ставшая особенно острой в 19 столетии, привела к попыткам нового дедуктивного построения геометрии, отвечающего современным требованиям науки.

Одним из ученых, предвосхитивших неевклидову геометрию, был итальянский монах Джироламо Саккери (1667-1733), преподававший грамматику в иезуитской коллегии в Милане. Здесь под влиянием Джованни Чевы ( Джованни Чева (1648-1734) – итальянский инженер-гидравлик и экономист) Саккери заинтересовался математикой и стал серьезно заниматься ею. Впоследствии он преподавал математику в университете города Павши. На последнем году своей жизни Саккери опубликовал (на латинском языке) книгу под заглавием «Евклид, очищенный от всех пятен». В ней он поставил перед собой задачу исправить все недостатки («пятна») «Начал» Евклида, в первую очередь доказать **V** постулат. Саккери решительнее и дальше своих предшественников сделал попытку доказать этот постулат от противного. Этот путь он не сумел проделать до конца, но идя по нему, Лобачевский а последствии открыл неевклидову геометрию.

Рассматривая четырехугольник (рис. 1), носящий его имя, Саккери стремится доказать, что гипотезы тупого и острого углов приводят к логическим противоречиям и что остается лишь гипотеза прямого угла, из которой вытекает евклидов **V** постулат. Он легко опровергает гипотезу тупого угла, он доказывает, что:

D C

E

B A

Рис. 1

1. геометрическое место точек плоскости, равноотстоящих от данной прямой по одну сторону, не является прямой или окружностью, а другой линией (которую Лобачевский впоследствии назвал эквидистантой, то есть «равноотстоящей»);

E F`

L` G`

M` H`

N` N

H

G

F

M

L

E

K

Рис. 2

1. две прямые, содержащиеся в одной плоскости (рис. 2), либо пересекаются в одной точке (такие прямые Лобачевский назвал «сходящимися»), либо не пересекаются, имея общий перпендикуляр, по обе стороны от которого они друг от друга удаляются («расходящиеся прямые» в терминологии Лобачевского), либо не пересекаются, удаляясь друг от друга в одном направлении и асимптотически приближаясь в другом (параллельные Лобачевского).

Если бы Саккери пользовался лишь логическими выводами, строгой дедукцией, то никакого противоречия он в указанных выше предложениях не нашел бы. Однако, будучи предубежден о невозможности того, что для евклидова постулата не имелось доказательства, Саккери для опровержения гипотезы острого угла прибег к утверждению чисто интуитивного характера: существование асимптотических прямых якобы «противоречит природе прямой линии». Заслуга Саккери состоит, разумеется, не в конечном его установлении промежуточных предложений, выведенных им на основе гипотезы острого угла, которые 100 лет спустя легли в основу новой неевклидовой геометрии Лобачевского.

К числу предшественников последнего, следует отнести и члена Берлинской Академии наук – астронома, математика и философа Иогана Генриха Ламберта, считавшего себя Швейцарским ученым и писавшего одни из своих произведений на французском языке. Другие – на немецком.

В опубликованном после его смерти произведении «Теория параллельных линий»(1786) Ламберт рассматривает четырехугольник. И исследует, как и Саккери, возможные при этом три гипотезы. Он получает ряд новых результатов геометрии, построенной на гипотезе острого угла, то есть будущей неевклидовой геометрии Лобачевского, в том числе и следующий: если сумма углов треугольника АВС, как известно, меньше двух прямых углов, равна 2d - , то площадь треугольника пропорциональна  ( - «дефект треугольника»). В отличие от Саккери Ламберт в своих рассуждениях нигде не отступает от строгой дедукции, и поэтому он не находит противоречия в гипотезе острого угла и признает тщетность всех попыток доказать V постулат. Не смотря на это, однако, Ламберт, как и его предшественники, не считал гипотезу острого угла действительно возможной. На таких же позициях стоял и знаменитый французский математик А.М. Лежандр (1752- 1833), значительно способствовавший своими многочисленными попытками доказать евклидову аксиому параллельности, привлечению внимания математиков первой половины 19 в. к проблеме **V** постулата.

Эта проблема, как известно, была впервые решена профессором Казанского университета, гениальным русским математиком Николаем Ивановичем Лобачевским (1792- 1856), открывшим в 1862 г. первую неевклидову геометрию, называемую так же « гиперболической». Независимо от него к тому же открытию пришел и молодой венгерский математик Я. Бояй. Первый печатный труд по неевклидовой геометрии - статья Н.И. Лобачевского « О началах геометрии» - появился в 1829г. в « Казанском вестнике». Через 3 года была опубликована на латинском языке работа по неевклидовой геометрии « Appendix» («Приложение»), название которой объяснялось тем, что она появилась к одной из работ отца Яноша, математика Фаркаша Бояй. После смерти Гаусса выяснилось, что он также еще до Лобачевского и Бояй пришел к той же геометрии. Идеи Лобачевского и Бояй с трудом пробивали себе дорогу в науке. Лишь в 70-80г.г. прошлого столетия после появления работ Римана, Кэли, Клейта и Пуанкаре более широким кругом математиков стало ясно, что **V** постулат недоказуем, так как он не зависит от других аксиом евклидовой геометрии.

Попытки доказательства V постулата принесли большую пользу в том отношении, что выяснили, какие теоремы геометрии относятся на этот постулат и какие от него не зависят. Совокупность теорем геометрии, не зависящих от евклидовой аксиомы параллельности, венгерский математик Янош Бояй назвал «абсолютной» геометрией. Все же остальные теоремы, то есть те, при доказательстве которых мы непосредственно или косвенно основываемся на V постулате, составляет собственно евклидову геометрию.

В курсе 6 класса важнейшими теоремами абсолютной геометрии являются следующие: теорема о смежных и вертикальных углах, о равенстве треугольников, о внешнем угле треугольника, о прямой и ломанной, о сравнительной длине перпендикуляра и наклонных, прямая теорема параллельных.

К собственно евклидовой геометрии относятся: обратная теорема параллельных линиях (то есть о том, что при пересечении двух параллельных прямых третьей соответственные углы равны), теорема о пересечении перпендикуляра и наклонной одной и той же прямой, о сумме углов треугольника со всеми ее следствиями (в том числе и теорема о сумме углов многоугольника).

На аксиоме параллельности основывается почти весь раздел

«Параллелограммы и трапеции». В главе «Об окружности» все теоремы о форме и положении окружности (за исключением теоремы о том, что через всякие три неколлинеарные точки можно провести окружность и следствий этой теоремы). Теорема о зависимости между дугами, хордами и расстояние хорд до центра, о взаимном расположении прямой и окружности не опираются на аксиому параллельных Евклида. Доказательство многих теорем раздела «О вписанных и описанных многоугольниках» существенно основывается на приложении о том, что внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, с ним не смежных углов, а это приложение в свою очередь вытекает из теоремы о сумме углов треугольника – теоремы, непосредственно связанной с евклидовой аксиомой параллельных. Теорема о том, что во всякий треугольник можно вписать окружность, не требует евклидовой аксиомы параллельных.

Раздел «Подобные фигуры» также построен на аксиоме параллельных, так как с самого начала лемма, доказывающая существование подобных треугольников опирается на евклидову теорию параллельных, на аксиому параллельности («прямая, параллельная какой-нибудь стороне треугольника отсекает от него треугольник, подобный данному»). Сюда относятся и все теоремы о метрических соотношениях в треугольнике и круге, в том числе и теорема Пифагора.

В разделе «Правильные многоугольники» теоремы о построении правильных многоугольников циркулем и линейкой опирается на аксиому параллельных, тогда как теорема о том, что около всякого правильного многоугольника можно описать окружность, принадлежит абсолютной геометрии. Теоремы о площадях фигур связаны с аксиомой параллельности Евклида, так как единицей измерения площадей избирается квадрат – понятие евклидовой геометрии.

В стереометрии к абсолютной геометрии относятся разделы об определении положения плоскости ( в том числе основные свойства плоскости), о перпендикуляре и наклонных к плоскости, о двугранных и многогранных углах, об угле прямой с плоскостью. Предложения, заключающие понятие параллельности, связаны с указанной аксиомой. Далее в 10 классе, все утверждения, содержащие понятие площади поверхности и объема, опираются на постулат Евклида.

В отношении геометрических построений следует иметь в виду, что к задачам абсолютной геометрии принадлежит построение треугольника по трем его сторонам или по двум сторонам и углу между ними, проведение перпендикуляра из точки на прямой к данной прямой. Не опираясь на **V** постулат можно решить также задачу о проведении касательной к данной окружности из внешней точки. Только в целях упрощения эта задача решается в учебниках при помощи аксиомы параллельных Евклида. На постулат Евклида опираются почти все задачи, содержащие в условии понятия площади и параллельности.

Два тысячелетия бесплодных усилий и крушений всех попыток (в том числе и своей собственной, основанной на методе приведения к абсурду) доказать **V** постулат, привели Лобачевского к мысли о том, что этот постулат не зависит от других аксиом евклидовой геометрии, то есть из них не вытекает, и поэтому его доказать нельзя.

Но если V постулат не зависит от других аксиом, то допуская все другие аксиомы (абсолютной геометрии), мы можем принять или не принять евклидов постулат. В первом случае мы получаем известную классическую евклидову геометрию, названную Лобачевским “употребительной”. Если же вместо евклидовой аксиомы параллельности принять другую, ей не эквивалентную, получим новую, неевклидову геометрию. Лобачевский и сформулировал новую аксиому параллельных, прямопротивоположную аксиоме Евклида: “Через точку вне прямой можно провести не только одну прямую, не встречающую данной прямой, а по крайней мере две”. Заменив этой аксиомой V постулат Евклида, Лобачевский разработал свою неевклидову геометрию, которая оказалась такой же логически безупречной, правильной, как и геометрия Евклида.

Если из т. С вне прямой АВ (рис.3) опустить на нее перпендикуляр СD и построить перпендикуляр СN к CD, то без помощи аксиомы параллельных доказывается, что NN’ || АВ.

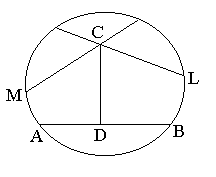
N` C N

L

A D B

Постулат Евклида утверждает, что из всех прямых плоскости АВС, проходящих через т. С, только одна прямая NN’ не встречает прямой АВ. Отказываясь от этой аксиомы, Лобачевский допускает, что через т. С проходит по крайней мере еще одна прямая CL не пересекающая АВ.

Аксиома Лобачевского кажется на первый взгляд странной, т.к. противоречит установившимся геометрическим представлениям. Однако при более глубоком анализе вопроса надо признать, что в отличие от других аксиом, касающихся фигур ограниченных размеров, аксиома параллельности Евклида относится к неограниченной прямой и никогда не может быть проверена с помощью непосредственного эксперимента, который может быть проведен лишь в ограниченной части пространства. Если, например, взять угол NCL достаточно малым, то отрезки CL и АВ не пересекутся даже на расстоянии, отходящим за пределы нашей планеты. И вот как раз в пределах определенной части плоскости, как бы эта часть не была велика, можно провести через данную точку множество прямых, не пересекающих данной прямой. Внутри круга любого конечного радиуса существует множество «прямых» (т.е. хорд), проходящих через т. С и не встречающих «прямой» АВ, например, CL, CM и другие (рис.4).



Таким образом, если отречься от всяких предубеждений, нет никакого основания считать аксиому Лобачевского “хуже” аксиомы Евклида, в смысле ее соответствия физической реальности. Кажущееся преимущество евклидовой геометрии, евклидовой аксиомы состоит в том, что ее содержание соответствует нашим привычным представлениям. Эти представления, однако, основаны на повседневном опыте в пределах сравнительно незначительной части вселенной. Между тем, в истории науки известны факты, когда более точно представленные эксперименты вызывали необходимость изменений, основанных на наглядности гипотез и аксиом, и замены их новыми гипотезами, которые лучше соответствуют объективному материальному миру. Ведь господствовало же у древних представление о том, что Земля плоская. В свое время казалась невероятной гелиоцентрическая гипотеза Коперника для всех людей, веками сжившихся с идеями геоцентрической гипотезы Птоломея. Известный английский математик так и писал: «Чем Коперник был для Птоломея, тем Лобачевский для Евклида». Между Коперником и Лобачевским любопытная параллель, Коперник и Лобачевский – оба славяне по происхождению. Каждый из них произвел революцию в научных идеях, воззрениях, и обе эти «революции» имеют одно и то же значение.

Причина их грандиозного значения заключается в том, что они суть революции в нашем понимании космоса…». По поводу этого сравнения советский ученый, профессор В.Ф. Каган писал, что «Истины, открытые Лобачевским, были гораздо глубже скрыты, более неожиданны; их выявление требовало гения более высокого ранга» Гелиоцентрическая система Коперника только по иному представила расположение и движение небесных тел в пространстве. Система же Лобачевского дала новое представление о самом пространстве.

Все вышесказанное – это физическая сторона геометрии. Но сейчас важнее математическая сторона геометрии, ее логическая структура.

*Из аксиомы Лобачевского вытекают следующие логические следствия:*

1) Если прямые CN и CL не встречают прямой АВ, то любая прямая СМ, проходящая через т. C внутри вертикальных углов NCL и N’CL’ также не встретит прямой АВ (рис.3, рис.4). Отсюда первое следствие аксиомы Лобачевского: через т. С вне прямой АВ плоскости АВС, проходит бесчисленное множество прямых, не пересекающихся с прямой АВ.

2) Если соединить (рис.2) какую-либо точку прямой DB с т. С, получим прямую, допустим, СК, проходящую через т. С и встречающую АВ. Итак, все прямые, проходящие через т. С внутри прямого угла NCD, разбиваются на две категории, на два класса: встречающие прямую АВ (названные Лобачевским «сходящимися» с АВ) и не встречающие прямую АВ (их Лобачевский называет «расходящимися» с АВ). Любая прямая первой категории образует с перпендикуляром CD угол, меньший угла, образованного перпендикуляром CD с любой прямой второй категории. Вращаясь непрерывно около т. С в направлении против часовой стрелки, прямая СК на известном этапе, допустим в положении CL, перестанет пересекать АВ и из сходящейся перейдет в категорию расходящихся с АВ прямых. Эта предельная прямая CL, служащая переходной прямой, граничной, отделяющей сходящиеся от расходящихся прямых, и названной Лобачевским параллельной к прямой АВ из т. С. Итак, параллельная CL – это не просто расходящаяся прямая, а первая, граничная расходящаяся, т.е. такая, что любая прямая, проходящая через т. С внутри угла, образованного параллельной CL и перпендикуляром CD, является сходящейся прямой, а всякая прямая, проходящая внутри угла LCN будет расходящаяся с прямой АВ. Угол DCL, образованный параллельной CL с перпендикуляром CD, называют углом параллельности.

В силу симметрии относительно перпендикуляра CD внутри прямого угла N’CD получим картину, аналогично той, которую мы имеем в угле NCD, т.е. построив угол DCF равный углу DCL, получим прямую CF, также параллельную прямой АВ слева от перпендикуляра CD. Итак, через т. С, лежащую вне прямой АВ, проходят в плоскости АВС две прямые, параллельные прямой АВ, в одну и другую сторону этой прямой. Все прямые, проходящие внутри вертикальных углов, образованных параллельными прямыми LL’ и GG’ (в том числе и евклидова «параллельная» NN’), расходятся с АВ; все остальные прямые, проходящие через т. С сходятся с прямой АВ.

Следовательно: а) 2 прямые как АВ и NN’, имеющие общий перпендикуляр CD, расходятся; б) если вращать прямую NN’ около т. С, допустим, по часовой стрелке, а прямую АВ около т.D в том же направлении так, чтобы углы, образованные этими прямыми с пересекающей их прямой CD, оставались равными, то прямые АВ и NN’ остаются расходящимися, т.е. две прямые, образующие при пересечении с третьей прямой равные соответственные углы, расходятся.

3) Из предыдущего положения вытекает, что на параллели Лобачевского различается направление параллельности. Прямая CE параллельна прямой АВ в направлении или в сторону от A к B, прямая CF параллельна той же прямой AB в направлении или в сторону ВА (от В к А) (рис.5).

ε

ω

С

F

x

A B

D

Рис. 5

Несмотря на коренные отличия, понятия параллельности у Лобачевского от одновременного понятия в геометрии Евклида, можно доказать, что «параллельность» в смысле Лобачевского тоже обладает свойствами взаимности или симметрии (если прямая а параллельна прямой в, то в параллельна а). И транзитивности (если а и в параллельны с, то а и в параллельны между собой).

Приведем некоторые другие понятия и факты геометрии Лобачевского:

1. *Функция Лобачевского.*

Как уже говорилось выше, через т. С в плоскости САВ проходят 2 направленные параллели к прямой АВ (СЕ и CF), симметрично расположенные относительно перпендикуляра CD (рис.5). Угол параллельности, образованный каждой из этих параллелей с CD, является острым, его величина не постоянна и зависит от расстояния CD(в геометрии Евклида угол параллельности всегда прямой). То, что угол параллельности острый, вытекает непосредственно из аксиомы Лобачевского. В изменении этого угла с изменением расстояния CD можно убедиться путем следующих рассуждений (рис.6).

Пусть C’D>CD, CE || AB, в т. С угол параллельности – W. Пусть далее прямая C’E ‘|| AB в т. С’ угол параллельности - W’. В силу свойства транзитивности CE ||C’E’. Ясно, что WW’. Действительно, если допустить, что W= W’, то следует также допустить, что C’E’ и CE – расходящиеся прямые, как было показано выше, а это неверно.

С

С`

K

ω`

ω

A D

Рис. 6

B

Построим C’K, образующую с CD угол   ясно, что ’<  , т.к. параллельC’E’ ближе к перпендикуляру, чем расходящаяся C’K. Итак, ' <  отсюда следует, что угол параллельности убывает по мере удаления от прямой АВ; чем ближе т. С к прямой АВ, т.е. чем короче перпендикуляр CD, тем больше угол параллельности. Если обозначить расстояние т. С от прямой АВ, т.е. длину перпендикуляра CD через х, то можно сказать, что угол параллельности есть функция от х, названная «функцией Лобачевского» и обозначаемая П (х). Это монотонно убывающая функция. При изменении аргумента х от 0 до  функция П (х) непрерывно изменяется соответственно от  /2 до 0. Таким образом ,



При *х*  0 , иными словами, если оставаться в пределах сравнительно небольших расстояний, то угол параллельности мало отличается от  /2 то есть от этого значения, которое он имеет в евклидовой геометрии, это означает, что геометрия Лобачевского не противоречит, не исключает геометрии Евклида; последнего можно рассматривать как частный случай большой общей геометрии – геометрии Лобачевского. Реальный смысл предельного перехода (при х  0) от геометрии Лобачевского к геометрии Евклида состоит в том, что физика изучает, в конечном счете, только ограниченную, сравнительно небольшую часть пространства. Вот почему в окружающей нас среде (даже в пределах нашей планеты) свойства физического пространства приблизительно таковы, какими мы их знаем из Евклидовой геометрии, но для всего пространства, для мира звезд, для вселенной в целом, они иные, неевклидовы.

1. Сумма углов треугольника меньше 2d.

Это предположение эквивалентно аксиоме Лобачевского, то есть из него вытекает эта аксиома и наоборот. Для примера докажем первое. Пусть ( рис.7) в прямоугольном треугольнике CDK сумма углов S=<2d, то есть <d .Это значит, что внутри угла NCK можно построить LCK = а (NCCD).

C

N

L

M

A

B

α

β

γ

γ

Рис. 7

Прямая CL не может пересечь прямой АВ в какой- либо точке М, так как если бы это случилось, то угол DKC , внешний по отношению к треугольнику KCM , равнялся бы внутреннему, не смежному с ним углу треугольника KCM, что противоречит абсолютной геометрии о внешнем угле треугольника. Итак, через т. С, кроме CN , проходит еще одна прямая – CL, не встречающая прямой АВ ; следовательно, верна аксиома Лобачевского. Разность 2d – S, то есть между 2d и суммой углов данного треугольника, называется угловым дефектом этого треугольника.

3. Предложение «сумма углов четырехугольника меньше 4d» вытекает из предыдущего. Отсюда следует, что в геометрии Лобачевского нет ни прямоугольников, ни квадратов. Вообще сумма углов n – угольника меньше 2d(n-2).

4. Внешний угол треугольника больше суммы внутренних, с ним не смежных углов. Действительно, пусть внешний угол треугольника, смежный с внутренним углом треугольника и пусть и  - остальные его внутренние углы, тогда: d.

Следует, что > + .

1. Если три угла одного треугольника соответственно равны трем углам другого треугольника, то эти треугольники равны между собой. Это четвертый признак равенства треугольников в геометрии Лобачевского.

Таким образом, в плоскости Лобачевского треугольник вполне определяется своими углами. Стороны и углы зависят друг от друга. Отсюда ясно, что в геометрии Лобачевского нет подобных фигур. Действительно, ведь из существования подобных фигур вытекает евклидова аксиома параллельности (доказательство Валлиса).

1. Площади. Уже известно, что, чем меньше размеры фигур, которые мы изучаем, тем ближе к геометрии Евклида, в которой угловой дефект треугольника равен 0. Доказывается следующая теорема: площадь треугольника прямопропорциональна его угловому дефекту. Чем меньше размеры фигуры, тем меньше ее дефект, тем меньше площадь. Однако угловой дефект по определениям не может превзойти 2d, следовательно, и площадь треугольника в геометрии Лобачевского не может стать больше некоторой, определенной, конечной величины.

Таковы некоторые из основных идей и фактов геометрии Лобачевского. После работы «О началах геометрии», появились в свет и другие произведения Лобачевского по неевклидовой геометрии: «Воображаемая геометрия» (1835), «Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам» (1836), «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных», опубликованные в «Ученых записках Казанского университета» в 1835-1838г.г., «Геометрические исследования по теории параллельных» (опубликованы впервые в1840г. в Берлине на немецком языке). Однако идеи Лобачевского были настолько революционными и до того опередили свой век, что не могли быть понятыми даже крупными математиками того времени. Поэтому новая геометрия не была признана современниками, была встречена с полным равнодушием и даже с иронией. Ее многие считали сплошной фантазией, а ее автора чудаком или даже невеждой. Одинокий Лобачевский не отказался от своих идей. Он твердо был убежден в логической правильности неевклидовой геометрии. Чтобы можно было это доказать, Лобачевский предпринимал астрологические наблюдения, и производил измерения углов космических треугольников, стороны которых измерялись расстояниями от Земли до небесных тел, в надежде установить, равна ли сумма углов треугольника 2dили она меньше двух прямых углов. Однако, измерения не могли дать определенного результата в силу их приближенного характера. Лобачевский всю жизнь искал оправдания своей геометрии в механике и астрономии и не переставал верить, что торжество его идей неминуемо.

В 1855г. умирает Гаусс, единственный крупный ученый, сумевший оценить Лобачевского по достоинству при его жизни, хотя и не решившись выступить публично в защиту новой геометрии. В этом же году, Лобачевский, которого постоянное умственное напряжение и тяжелые переживания, перенесенные в борьбе за признание своих идей, довели до потери зрения, диктует последнее свое произведение «Пангеометрия»\*. Лобачевский умер в 1856 г. непризнанным, почти забытым.

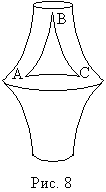
Не получил признание при жизни и гениальный венгерский математик Янош Бояй (1802-1860). Его «Appendix», содержащий основы неевклидовой геометрии, изложен исключительно сжато и схематично – вот одна из причин, сделавших это классическое произведение недоступным для его современников.

города Марош-Варигархен. За это время он опубликовал здесь некоторые свои работы, в том числе и теорему о равновеликости и равносоставленности многоугольников, включив ее в важнейший свой труд «Temtamen» («Опыт»), более полное заглавие, гласит в русском переводе: «Опыт введения юных учащихся в начала чистой математики, элементарной и высшей» (1832). В виде приложения именно к этому труду и был опубликован «Appendix» Яноша Бояй.

--------------------------------

\*Греческое слово «пан» в сложных словах означает «все», «Пангеометрия» - «Всеобщая геометрия»

После того, как стало известно, что Гаусс считал геометрию Лобачевского логически вполне правильной, «неевклидова геометрия»(названная так именно Гауссом), привлекла к себе внимание многих математиков. Произведения Лобачевского и «Appendix» Бояй были переведены на французский, итальянский и другие языки. Однако, выявилось много противников неевклидовой геометрии, которые отнеслись к ней с недоверием, утверждая, что она представляет собой сплошную фантазию, нелепость, которая рано или поздно будет обнаружена. Положение коренным образом изменилось, когда итальянский математик, профессор римского университета Эудженио Бельтрами (1835-1900) нашел модель для неевклидовой геометрии, показав в своей работе «Опыт интерпретации неевклидовой геометрии»(1868г.), что наряду с плоскостями, на которых осуществляется евклидова геометрия, и сферическими поверхностями, на которые действуют формулы сферической геометрии, существуют и такие реальные поверхности, названные им псевдосферами (рис.8), на которых частично осуществляется планиметрия Лобачевского.



Известно, что сферу можно получить вращением полуокружности вокруг своего диаметра. Подобно тому, псевдосфера образуется вращением линии FCE, называемой трактрисой, вокруг ее оси АВ (рис.9).Итак, псевдосфера – это поверхность в обыкновенном реальном пространстве, на котором выполняются многие аксиомы и теоремы неевклидовой планиметрии Лобачевского. Например, если начертить на псевдосфере треугольник, то легко усмотреть, что сумма его внутренних углов меньше 2d. Сторона треугольника – это дуги псевдосферы, дающие кратчайшее расстояние между двумя ее точками и выполняющие ту же роль, которую выполняют прямые на плоскости. Эти линии, называемые геодезическими, можно получить, зажав туго натянутую и политую краской или мелом нить, в вершинах треугольника. Таким образом, для планиметрии Лобачевского была найдена реальная модель - псевдосфера. Формулы новой геометрии Лобачевского нашли конкретное истолкование. Ими можно было пользоваться, например, для решения псевдосферических треугольников.

A D N B

Рис. 9

F

E

C

Псевдосферу, которую мы назвали «моделью», Бельтрами назвал интерпретацией (истолкованием) неевклидовой геометрии на плоскости. Впоследствии, с развитием и введением в математику аксиоматического метода, под интерпретацией (или моделью) некоторой системы аксиом стали понимать любое множество объектов, в которых данная система аксиом находит свое реальное воплощение, то есть, любая совокупность объектов, отношение между которыми полностью совпадают с теми, которые описываются в данной системе аксиом. При этом полагают, что если для некоторой системы аксиом существует или можно построить интерпретацию (модель), то эта система аксиом непротиворечива, то есть, не только сами аксиомы, но и любые теоремы, на них логически основывающиеся никогда не могут противоречить одна другой.

Итак, доказательство логической непротиворечивости той или иной геометрии, можно свести к доказательству существования модели соответствующей системы аксиом.

Первой моделью планиметрии Лобачевского была интерпретация Бельтрами в 1868г., к которой позже, но из других соображений и в ином виде, пришел в 1870г. немецкий математик Феликс Клейн. Идею этой интерпретации можно усмотреть в приведенном выше рис.4. В качестве плоскости Лобачевского, коротко «плоскость L», принимается внутренность некоторого круга (исключается таким образом его контур) на обычной евклидовой плоскости. Прямыми L служат хорды круга, исключая, конечно, их концы. Принадлежность и между понимаются в обычном евклидовом смысле. Оказывается, что в этой модели имеют место все аксиомы абсолютной геометрии, то есть, аксиомы принадлежности, порядка, конгруэнтности, непрерывности. Что же касается аксиомы параллельности, то в этой модели имеет место не постулат Евклида, а именно, аксиома Лобачевского: через т. С, не лежащую на данной прямой (хорде) АВ, можно провести хотя бы 2 прямые (хорды), не пересекающие данную. Выполняются, конечно, так же все следствия аксиомы. Так, например, среди проходящих через данную точку расходящихся прямых L, имеются две предельные CL и CM, параллельные к АВ в смысле Лобачевского, так как разделяют класс расходящихся с АВ прямых от класса сходящихся. Сами параллельные не имеют с АВЫ общих точек, поскольку точки А и В, лежащие на окружности, исключены.

Аналогично строится модель Клейна геометрии Лобачевского в пространстве, принимая внутренность какого-либо шара за пространство L.

Таким образом, была показана непротиворечивость геометрии Лобачевского. Ее аксиомы и теоремы не могут быть противоречивыми, так как каждой из них соответствует факт евклидовой геометрии внутри круга (или внутри шара). Если в геометрии Лобачевского встретились бы две противоречащие друг другу теоремы, то, переводя эти теоремы на язык обычной геометрии посредством модели Клейна, мы получили бы противоречие между соответствующими теоремами в геометрии Евклида, то есть, построением модели, Клейн показал, что геометрия Лобачевского непротиворечива в такой же мере, в какой непротиворечива геометрия Евклида.

Другую модель геометрии Лобачевского построил в 1882г. французский математик Анри Пуанкаре (1854-1912), применивший ее к решению некоторых важных задач теории функций комплексного переменного.

Одним из важнейших результатов открытия геометрии Лобачевского (называемой также гиперболической геометрией) было развитие новых неевклидовых геометрий, в первую очередь, геометрии Римана (в узком смысле), называемой так же эллиптической геометрией. В качестве модели планиметрии Римана может служить сфера, если считать каждую пару диаметрально противоположных ее точек за одну «точку».

Итак, плоскость Римана представлена Евклидовой сферой. На сфере нет прямых линий, но имеются так называемые большие окружности (рис.10), то есть окружности с центром в в центре сферы, которые в качестве геодезических ее линий выполняют на сфере ту же роль, что и прямые на плоскости. Дуги больших окружностей дают кратчайшие расстояния между двумя точками сферы, через которые они проходят, подобно тому, как отрезок прямой на плоскости представляет кратчайшее расстояние между двумя точками сферы, через которую они проходят, подобно тому, как отрезок прямой на плоскости представляет кратчайшее расстояние между его концами; через две точки сферы проходит одна и только одна большая окружность, подобно тому, как две точки плоскости определяют одну и только одну прямую; из дуг больших окружностей на сфере, как из отрезков прямых на плоскости можно образовать сферические треугольники, четырехугольники, многоугольники. Одним словом, большие окружности сферы – это ее «прямые» (рис.11). Однако, наряду с некоторыми сходствами, имеется и большое различие между сферической геометрией с одной стороны и геометрией Евклида и Лобачевского с другой. Аксиомы, следовательно, и теоремы, и формулы сферической геометрии во многом отличаются от аксиом, теорем и формул плоской геометрии Евклида, а так же Лобачевского. В частности, прямые Римана все замкнуты и конечны, имея одну и ту же длину. Сумма углов сферического треугольника, как известно, больше 2d, каждые две прямые имеют одну общую точку, то есть, на римановой плоскости нет параллельных прямых.

Рис. 10

Рис. 11

Q

R

Q

R

В разработку эллиптической геометрии значительный вклад внес Гаусс своими исследованиями о поверхностях.

Сравнивая три, в известном смысле дополняющих друг друга , геометрии: гиперболическую, евклидову (называемую так же параболической) и эллиптическую, следует отметить, что в первой из них через точку вне данной прямой можно провести к этой прямой две параллельные, во второй – одну, а в третей – ни одной. В первой сумма внутренних углов треугольника меньше 2d, во второй равна 2d, а в третей – меньше 2d.

Возникшие из попыток доказательства V постулата неевклидовы геометрии, открытые Лобачевским, Бояй, Гауссом и Риманом и развитые в трудах Бельтрами, Кэли, Клейна, Пуанкаре и других ученых, стали в наши дни необходимым аппаратом для изучения механики, физики и астрономии. Особенно важна геометрия Лобачевского для теории относительности, так как группа важных для теории относительности «преобразований Лоренца» изоморфна группе движений пространства Лобачевского. С другой стороны, открытие неевклидовой геометрии привело к новым исследованиям в области оснований геометрии и, в частности, к аксиоматике Гильберта. Отказываясь от аксиомы Архимеда или от аксиомы Кантора, он получает «неархимедову» соответственно «неканторову» геометрию и т.п.

Открытие неевклидовой геометрии, начало которому положил Лобачевский, не только сыграло огромную роль в развитии новых идей и методов в математике естествознании, но имеет и философское значение. Господствовавшее до Лобачевского мнение о незыблемости геометрии Евклида в значительной мере основывалось на учении известного немецкого философа И. Канта (1724-1804), родоначальника немецкого классического идеализма. Кант утверждал, что человек упорядочивает явления реального мира согласно априорным представлениям, а геометрические представления и идеи якобы априорны (латинское слово aprior означает – изначально, заранее), то есть, не отражают явлений действительного мира, не зависят от практики, от опыта, а являются врожденными человеческому миру, раз и навсегда зафиксированными, свойственными человеческому разуму, его духу. Поэтому , Кант считал, что Евклидова геометрия непоколебима, неизменна, и является вечной истиной. Еще до Канта геометрия Евклида считалась незыблемой, как единственно возможное учение о реальном пространстве.

Открытие неевклидовой геометрии доказало, что нельзя абсолютировать представления о пространстве, что «употребительная» (как назвал Лобачевский геометрию Евклида) геометрия не является единственно возможной, однако это не подорвало незыблемость геометрии Евклида. Итак, в основе геометрии Евклида лежат не априорные, врожденные уму понятия и аксиомы, а такие понятия, которые связаны с деятельностью человека, с человеческой практикой. Только практика может решить вопрос о том, какая геометрия вернее излагает свойства физического пространства. Открытие неевклидовой геометрии дало решающий толчок грандиозному развитию науки, способствовало и поныне способствует более глубокому пониманию окружающего нас материального мира.

### 

Библиография

1. Г.И. Глейзер. История математики в школе IX – X классы. Пособие для учителей. Москва, «Просвещение» 1983г.
2. Даан Дальмедино А., Пейффер И. Пути и лабиринты. Очерки по истории математики. Перевод с французского. М: Мир.1986г.
3. Б.Л. Лаптев. Н.И. Лобачевский и его геометрия. Пособие для учащихся. М. «Просвещение», 1970г.
4. И.М. Яглам. Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия.Серия «Библиотека математического кружка» М: 1963г.

### Приложение 1

Николай Иванович Лобачевский, второй сын мелкого чиновника, родился 1 декабря(20 ноября) 1792 года в Нижнем Новгороде, в России. Когда Николаю было 7 лет, его мать, Прасковья Ивановна, осталась одна с тремя маленькими сыновьями. И до этого жалование отца с трудом хватало на содержание семьи; теперь она встретилась с крайней нищетой. Она переехала в Казань, где как могла, подготавливала детей к школе, и они были приняты в гимназию на казенное содержание. Николай приступил к занятиям в 1802 году, в десятилетнем возрасте. Его успехи в математике и в древних языках были феноменальными. В 14 лет он был подготовлен для университета. В 1807 году он поступил в Казанский университет, в котором ему предстояло провести последующие 40 лет жизни – как студенту, экстраординарному профессору, профессору и, наконец, ректору.

В 1811 году, в возрасте 18 лет, Лобачевский получил степень магистра, к тому же с отличием. В это же время его старший брат Алексей вел курсы элементарной математики по подготовке младших правительственных чиновников, и, когда он получил отпуск по болезни, Николай заменил его. В апреле1814 года он был утвержден адъюнктом чистой математики, а 2 года спустя ему было присвоено звание профессора.

Назначение Лобачевского экстраординарным профессором состоялось в 1816 году в необычно молодом возрасте 23 лет. Его обязанности были многотрудными. Дополнительно к работе по математике ему поручались лекционные курсы по астрономии и физике. Он блестяще справился с порученным заданием. Это послужило поводом для еще большей нагрузки.

Вскоре Лобачевский взялся за переустройство университетской библиотеки и университетского музея, находившихся в хаотическом состоянии.

Со смертью Александра I дела обернулись к лучшему. Специальный уполномоченный правительства для преднамеренного преследования Казанского был уволен. Нуждаясь в политической и моральной поддержке своей деятельности в университете, новый попечитель обеспечил назначение в 1827 году Лобачевского ректором. Математик был теперь главой университета, но эта должность отнюдь не была синекурой. Под его умелым руководством весь штат был реорганизован, были привлечены лучшие люди, преподавание было либерализовано, несмотря на официальные препятствия, была построена библиотека, соответствующая высшему уровню научных требований, были организованы механические мастерские для изготовления научных инструментов, которые требовались для исследований и преподавания, была основана и оборудована обсерватория – любимое детище энергичного ректора.

Даже ректорское достоинство не удерживало Лобачевского от работы руками в библиотеке и музее, когда он чувствовал, что его помощь необходима. Университет был его жизнью, и он любил его.

Кажется невероятным, что Лобачевский, так сильно перегруженный преподавательскими и административными обязанностями, мог находить время для научной работы. Он создал один из величайших шедевров всей математики – неевклидову геометрию и поставил веху в человеческом мышлении. Он трудился над этим с перерывами не менее 20 лет. Его первое публичное сообщение по этой теме было сделано на физико – математическом факультете Казанского университета в 1826 году.

В 1846 году его грубо лишили должностей профессора и ректора университета, хотя тогда он был полон физических и умственных сил, более чем когда- либо он был способен продолжать свои математические исследования. Отвратительная неблагодарность властей сломила Лобачевского. Он оставил все надежды снова стать кем-то в университете, который своей научной славой почти целиком был обязан его усилиям, и после этого появлялся в нем только случайно, чтобы помочь на экзаменах. Хотя его зрение быстро ухудшалось, он был еще способен к интенсивному математическому мышлению.

Он все еще любил университет. Его здоровье пошатнулось, когда умер его сын; но он все еще надеялся, что сможет принести некоторую пользу. В 1855 году университет праздновал свое пятидесятилетие. Лобачевский лично присутствовал на торжествах и принес в дар юбиляру экземпляр «Пангеометрии» – завершающей научной работы его жизни. Эта работа не была написана его собственной рукой: он диктовал ее, так как в то время был уже слепым. Через несколько месяцев, 24 февраля 1856 года, 62-х лет от роду, он умер.

# Приложение 2

Жизнь и творчество Яноша Бояй тесно связаны с деятельностью его отца, математика Фаркаша Бояй (1775-1856). Большую часть своей жизни отец и сын провели в родной Трансильвании. Еще будучи студентом Геттингенского университета, Бояй-отец дружил с юным Гауссом, в беседах с которым он часто обсуждал проблему V постулата. Впоследствии Ф. Бояй много лет занимается исследованиями в области теории параллельных линий, которые, однако, не привели его к желаемому результату. С 1804г. и почти до конца своей жизни он работал в должности преподавателя математики, физики и химии в евангелистско-реформистской коллегии небольшого трансильванского

Одаренность Яноша и его страстный интерес к математике и музыке складывались еще в детстве. В

.возрасте 10 лет он уже имел свои собственные музыкальные композиции, в 13 лет владел дифференциальным и интегральным исчисленьями, а в 15 лет – выдержал экзамен на аттестат зрелости. В 1818г. Янош отправился в Вену , где на протяжении 4 лет состоял студентом военно-инженерной академии. В 1823г., окончив академию и получив звание офицера, Янош был отправлен на службу в трансильванский город Темешвар Здесь, располагая достаточным временем, он всецело отдался математике и со страстным увлечением занялся исследованием проблемы V постулата, начатым еще в годы студенчества. В одном из своих писем, направленных в 1823г. отцу, Янош сообщил, что хотя и не достиг еще цели, но получил значительные результаты: "Из ничего я создал новый мир"

Отец, на собственном опыте узнавший, сколько горя и разочарований может принести проблема V постулата, в своих письмах умолял сына отказаться от этих занятий. Однако, Янош продолжал свои исследования, добился цели и, тщательно отработав свои исследования, убедил почти ничего не понявшего в них отца, поместить их в качестве «Приложения» в конце «Тентамена». Работа была послана отцом на отзыв Гауссу. Последний, однако, вместо одобрения молодого венгерского математика , в ответном письме писал, что содержание этой работы и ее результаты почти сплошь совпадения с его, которые он получил уже30-35 лет тому назад.

Ответ Гаусса произвел на Яноша Бояй удручающее впечатление. Не зная о том, что приоритет открытия неевклидовой геометрии принадлежал уже с 1829г. Н.И. Лобачевскому, он не поверил, что Гаусс пришел к тем же идеям независимо от него, Яноша Бояй. Он заподозрил Гаусса в намерении похитить у него приоритет великого открытия, ставшего для Яноша делом и смыслом всей его жизни.

Его переживания и отчаяние резко возросли, когда в его руки попало сочинение Н.И. Лобачевского на немецком языке «Геометрические исследования по теории параллельных линий». Янош высказал предположение , что Лобачевский – это всего лишь псевдоним, под которым скрывается Гаусс, похитивший у него приоритет открытия неевклидовой геометрии.

Когда в 60-х годах прошлого столетия была опубликована переписка Гаусса с его друзьями, ученые узнали, что Гаусс полностью разделял взгляды Лобачевского и Бояй, и сам, независимо от них, пришел к тем же идеям.

## Приложение 3

Карл Фридрих Гаусс родился 30 апреля 1777 года в доме №1550, что стоял на канале Венденгребене в Брауншвейе. По мнению биографов, он унаследовал от родных отца крепкое здоровье, а от родных матери яркий интеллект. Ближе других был к будущему ученому дядя Фридерихс – искусный ткач, в котором, по словам племянника, «погиб прирожденный гений».Гаусс говорил о себе, что он «умел считать, раньше, чем говорить». Самая ранняя математическая легенда о нем утверждает, что в 3 года он следил за расчетами отца с каменщиками -–поденщиками и неожиданно поправил отца, причем оказался прав.

В 7 лет Карл Фридрих поступил в Екатериненскую народную школу. Поскольку считать там начинали с третьего класса, первые два года на маленького Гаусса внимания не обращали. В 3-й класс ученики обычно попадали в 10-летнем возрасте и учились там до конфирмации (15 лет). Учителю Бюттнеру приходилось заниматься одновременно с детьми разного возраста и разной подготовки. Поэтому он давал обычно части учеников длинные задания на вычисление, с тем, чтобы иметь возможность беседовать с другими учениками. Однажды группе учеников, среди которых был Гаусс, было предложено просуммировать натуральные числа от 1 до100. По мере выполнения задания ученики должны были класть на стол учителя свои грифельные доски. Порядок досок учитывался при выставлении оценок. 10-и летний Гаусс положил свою доску, едва Бюттнер кончил диктовать задание. К всеобщему удивлению, лишь у него ответ был правилен. Секрет был прост: Пока диктовалось задание Гаусс успел переоткрыть формулу для суммы арифметической прогрессии! Слава о чудо-ребенке распространилась по маленькому Брауншвейгу.

В школе, где учился Гаусс, помощником учителя, основной обязанностью которого было чинить перья младшим ученикам работал некто Бартельс, интересовавшийся математикой и имевший несколько математических книг. Гаусс и Бартельс начинают заниматься вместе; они знакомятся с биномом Ньютона, бесконечными рядами…..

Через некоторое время Бартельс получит кафедру чистой математики в Казанском университете и будет учить математику Лобачевского.

О Гауссе узнают при дворе. В1791 году его представляют Карлу Вильгельму Фердинанду – герцогу Брауншвейгскому. Мальчик бывает во дворце и развлекает придворных искусством счета. Благодаря покровительству герцога Гаусс смог в октябре 1795 года поступить в Геттингенский университет. Первое время он слушает лекции по филологии и почти не посещает лекции по математике. Но это не означает, что он не занимается математикой.

Феликс Клейн, замечательный математик, глубокий исследователь научного творчества Гаусса, говорил о великом ученом следующее: «Естественный интерес, детское любопытство приводит впервые мальчика независимо от каких-либо внешних влияний к математическим вопросам. Первое, что его привлекает, это чистое искусство счета. Он беспрестанно считает с прямо-таки непреоборимым упорством и неутомимым прилежанием. Благодаря этим постоянным упражнениям в действиях над числами, например, над десятичными дробями с невероятным числом знаков, он не только достигает изумительной виртуозности в технике счета, которой он отличался всю свою жизнь, но его память овладевает таким колоссальным числовым материалом, он приобретает такой богатый опыт и такую широту кругозора в области чисел, какими навряд ли обладал кто-либо до или после него. Осенью 1795 года Гаусс переезжает в Геттинген и прямо-таки проглатывает впервые попавшуюся в его руки литературу: Эйлера и Лагранжа».

«Рассказывают, что Архимед завещал построить над своей могилой памятник в виде шара и цилиндра в память о том, что он нашел отношение объемов цилиндра и вписанного в него шара 3:2. Подобно Архимеду Гаусс выразил желание, чтобы в памятнике на его могиле был увековечен семнадцатиугольник. Это показывает, какое значение сам Гаусс придавал своему открытию. На могильном камне Гаусса этого рисунка нет, но памятник, воздвигнутый ему в Брауншвейге, стоит на семнадцатиугольном постаменте, правда, едва заметном зрителю». (Г. Вебер)