**Интересные примеры в метрических пространствах**

1. В n-мерном евклидовом пространстве полная ограниченность совпадает с обычной ограниченностью, то есть с возможностью заключить данное множество в достаточно большой куб. Действительно, если такой куб разбить на кубики с ребром ε, то вершины этих кубиков будут образовывать конечную -сеть в исходном кубе, а значит, и подавно, в любом множестве, лежащем внутри этого куба.

Единичная сфера S в пространстве l2 дает нам пример ограниченного, но не вполне ограниченного множества. Рассмотрим в S точки вида:

е1=(1, 0, 0, ..., 0, 0, ...),

е2=(0, 1, 0, ..., 0, 0, ...),

…………………………,

еn=(0, 0, 0, ..., 1, 0, ...),

………………………….

Расстояние между любыми двумя точками еn и ем (n≠m) равно √2. Поэтому последовательность {еi} и любая ее подпоследовательность не сходятся. Отсюда в S не может быть конечной ε-сети ни при каком ε<√2/2.

Рассмотрим в l2 множество П точек

x=(x1, x2, …, xn, ...),

удовлетворяющих условиям:

| x1|≤1, | x2|≤1/2, …,| xn|≤1/2n-1, ...

Это множество называется фундаментальным параллепипедом («гильбертовым кирпичем») пространства l2. Оно представляет собой пример бесконечномерного вполне ограниченного множества. Для доказательства его полной ограниченности поступим следующим образом.

Пусть ε>0 задано. Выберем n так, что 1/2n-1<ε/2. Каждой точке x=(x1, x2, …, xn, ...)

из П сопоставим точку x\*=(x1, x2, …, xn, 0, 0, ...)

из того же множества. При этом

ρ(x,x\*)=≤<1/2n-1<ε/2.

Множество П\* точек вида x\*=(x1, x2, …, xn, 0, 0, ...) из П вполне ограничено (как ограниченное множество в n-мерном пространстве). Выберем в П\* конечную ε/2-сеть. Она будет в то же время ε-сетью во всем П. Докажем это.

Доказательство: для ∀ε>0, выберем n так, что 1/2n-1<ε/2.

∀x∈П: x=(x1, x2, …, xn, ...) сопоставим

x\*=(x1, x2, …, xn, 0, 0, ...) и x\*∈П. При этом ρ(x,x\*)<ε/2. Из пространства П выберем x\*\*: ρ(x\*,x\*\*)<ε/2.

Тогда: ρ(x,x\*\*)≤ρ(x,x\*)+ρ(x\*,x\*\*)<ε/2+ε/2=ε.

Множество П\* содержит точки вида x\*=(x1, x2, …, xn, 0, 0, ...), в этом множестве выберем конечную ε/2-сеть. Она будет ε-сетью в пространстве П, так как ρ(x,x\*\*)<ε.