**Филлотаксис и последовательность Фибоначчи**

В. Березин

Реальные соцветия подсолнуха два семейства логарифмических спиралей Спирали одного семейства закручиваются к центру против хода часовой стрелки, другого — по ходу. В ботанике такое сочетание двух семейств спиралей называют филлотаксисом (в переводе с греческого слово это означает «устройство листа»).

Оказывается, числа спиралей в соцветиях подсолнечника приближенно равны двум соседним членам так называемой последовательности Фибоначчи: 34 и 55 или 89 и 144.

Филлотаксис подсолнечника — одна из многих неожиданных встреч с последовательностью Фибоначчи. Впервые с ней столкнулся в прошлом столетии французский математик Эдуард Люка. Читая книгу «Искусство абака» знаменитого итальянского математика эпохи Возрождения Леонардо Пизанского, известного больше по прозвищу Фибоначчи, и решая одну из задач Леонардо, Люка составил последовательность 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ..., в которой

Fn = Fn–1 + Fn–2.

Неожиданная встреча с этой последовательностью состоится сейчас и у нас. Предположим, что α2 = 1 – α.

Выразим значения степеней α3, α4, α5, ... через 1 = α0 и α:

|  |  |
| --- | --- |
| α3 = | α·α2 = 2α – 1, |
| α4 = | 2 – 3α, |
| α5 = | 5α – 3, ... |

Вы узнали в коэффициентах последовательность Фибоначчи, начиная с члена F1? По-видимому, и для любого n можно записать формулу

αn = (–1)n (Fn–1 – Fnα),

где Fn–1 и Fn — члены последовательности Фибоначчи. Докажем это методом математической индукции:

|  |  |
| --- | --- |
| αn+1 = αn·α | = (–1)n (Fn–1α – Fnα2) = (–1)n (Fn–1α – Fn(1 – α)) = |
|  | = (–1)n (–Fn + (Fn–1 + Fn)α) = (–1)n+1 (Fn – Fn+1α). |

У уравнения α2 = 1 – α два корня — положительный α = (√5 – 1)/2 и отрицательный α = –(√5 + 1)/2. Как мы убедились,

|  |  |
| --- | --- |
|  | (–1)n α1n = Fn–1 – Fnα1, |
|  |  |
|  | (–1)n α2n = Fn–1 – Fnα2. |

Решая эту систему относительно Fn, получаем, что

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Fn = | 1  √5 |  |  | ( | 1 + √5  2 | ) | n | – | ( | 1 – √5  2 | ) | n |  | . |

И этот результат довольно неожидан — последовательность целочисленная, а общий её член выражается через квадратные радикалы.

Следующую неожиданность получим, если вычислим

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  | | --- | |  | | lim | | n → ∞ | | Fn  Fn+1 | = | √5 – 1  2 | . |

Это знаменитое «золотое сечение» (о нём см., например, «Квант», 1973, №8, с.22 и далее). Прямоугольный предмет с таким отношением сторон наиболее приятен для глаза.

Существует много формул, связывающих между собой члены последовательности Фибоначчи. Вот некоторые из них:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | n |  | n |  |
| Fn+2 = 1 + | ∑ | Fk, F2n = | ∑ | F2k–1, |
|  | k=1 |  | k=1 |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | n |  | 2n–1 |  |
| F2n+1 = 1 + | ∑ | F2k, F2n–2 = –1 + | ∑ | (–1)k–1 Fk, |
|  | k=1 |  | k=1 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | | 2n–1 |  | | | | |
| F | 2  2n | = | ∑ | FkFk+1, F2n–1 = F | 2  n | + F | 2  n–1 | . |
|  | | | k=1 |  | | | | |

Выкладывание этой скромной по размеру статьи преследует несколько целей. Во-первых, «всякое может быть». Возможно, эту публикацию увидит школьник, впервые услышавший о числах Фибоначчи и желающий узнать о них побольше. Он сможет здесь найти названия книг для дальнейшего чтения. Во-вторых, данная статья упоминалась в другой, уже выложенной статье о [сопряжённых числах](http://ega-math.narod.ru/Quant/Vaguten.htm), и я постарался (в меру сил), чтобы тем, кто добрался до тамошнего списка дополнительной литературы, не пришлось далеко ходить. :) И наконец, главное: этот файл содержит линк на видеоролик, в котором рассказывается и про подсолнух, и про прямоугольник, «приятный глазу», и про золотое сечение. В общем, почти видеоверсия данной статьи. А то, что закадровый комментарий на английском, так это и неплохо — лишний повод поупражняться в языке.