3. Расчет отношения правдоподобия при сложных гипотезах.

**3.1 Общие соображения**

В типичном для практики случае различения сложных гипотез, когда один или несколько параметров функций правдоподобия  неизвестны, общий метод вычисления отношения правдоподобия состоит в усреднении этих функций, рассматриваемых при фиксированных значениях параметров как условные, по априорному распределению вероятностей неизвестных параметров , которое считается заданным: .

Полученные в результате усреднения функции правдоподобия не содержат неизвестных параметров (являются **безусловными**) и далее могут рассматриваться как соответствующие простым гипотезам  и . (Знак ~ мы будем использовать, чтобы отличать безусловные функции правдоподобия, полученные усреднением по неизвестным параметрам, от функций правдоподобия, изначально не содержавших таких параметров).

Необходимо помнить, что операция усреднения функций правдоподобия  по априорным распределениям неизвестных параметров неминуемо приводит к уменьшению объема содержащейся в них полезной информации. Наглядно этот эффект проявляется в уменьшении статистического “расстояния” между различаемыми распределениями (“сближении” гипотез) за счет роста дисперсий функций правдоподобия. Процесс “сближения” гипотез поясняется рисунком 3.1, где изображен переход от функции правдоподобия , характеризуемой точно известным ожиданием , к безусловной функции правдоподобия , полученной усреднением условных функций правдоподобия  по априорному распределению , которое для простоты и наглядности принято дискретным: , с математическим ожиданием .

Подчеркнем, что утрату части информации при вычислении безусловных функций правдоподобия следует понимать как неизбежную “плату” за априорную неопределенность. Иными словами, полученная в результате усреднения статистика отношения правдоподобия сохраняет всю доступную информацию (остается достаточной), однако объем этой информации объективно сокращается. Количественную оценку такого сокращения мы дадим позже.

Рис.3.1

3.2. Способы расчета безусловного отношения правдоподобия при наличии неизвестных параметров

В зависимости от условий задачи безусловное отношение правдоподобия может вычисляться различными способами.

Если неизвестен вектор  параметров помехи, по этим параметрам должны усредняться функции правдоподобия, соответствующие обеим гипотезам. При этом отношение правдоподобия .

Если неизвестен вектор  параметров сигнала, то усреднению подлежит только числитель , однако часто бывает удобно ввести знаменатель под знак интеграла в качестве множителя, не зависящего от переменной интегрирования. При этом усредняется сразу отношение правдоподобия: .

Приводимые ниже примеры аналитического расчета безусловных функций правдоподобия, отношения правдоподобия и его логарифма для некоторых моделей априорной неопределенности иллюстрируют, как меняется структура решающей статистики в зависимости от объема наших знаний относительно параметров сигнала.

**3.2.1. Сигнал с постоянной амплитудой и постоянной неизвестной фазой.**

В качестве исходной примем рассмотренную в разделе 2 модель сигнала с точно известной амплитудой и начальной фазой.

Первая “ступень” неопределенности – сигнал с известной амплитудой, фаза  которого априори неизвестна, но остается постоянной за все время принятия решения (сигнал такого типа относится к классу **квазидетерминированных**). Соответствующая этому случаю совместная плотность распределения отсчетов амплитуды  и фазы  (3.1) должна рассматриваться как условная при некотором значении фазы  и интегрироваться по ее априорному распределению, которое будем считать равномерным в интервале . Итак

 (3.1)

С учетом известной формулы для косинуса разности запишем  (3.2).

Выражение ( 3.2 ) с помощью обозначений  приводим к виду .

Соответственно, выражение ( 3.1 ) может быть записано как  Подинтегральное выражение можно разложить в ряд по бесселевым функциям : где  - модифицированная функия Бесселя -го порядка.

Поскольку , после интегрирования остается только первое (содержащее ) слагаемое, следовательно 

Таким образом, функция правдоподобия сигнала с неизвестной, но постоянной за время наблюдения фазой имеет вид:  (3.3).

Функция правдоподобия , соответствующая нулевой гипотезе, от фазы сигала не зависит, поэтому (см. раздел 10)  (3.4).

Соответственно, отношение правдоподобия и его логарифм  (3.5),  (3.6), где .

В соответствии с выражением (3.6) оптимальная обработка сигнала с неизвестной постоянной начальной фазой реализуется схемой, содержащей два квадратурных канала. Выходной эффект такой схемы не зависит от значения начальной фазы .

**3.2.2 . Сигнал с постоянной амплитудой и случайной фазой.**

Следующая модель соответствует сигналу с постоянной амплитудой и независимо флуктуирующей от отсчета к отсчету случайной фазой. Распределение отсчетов фазы считаем равномерным: .

Последовательность операций при выводе формулы та же самая, что и для сигнала с постоянной фазой, разница лишь в том, что усреднение функций правдоподобия здесь производится для каждого отсчета независимо. При этом интегрироваться должны одномерные функции правдоподобия огибающей , которые для каждого конкретного значения начальной фазы  рассматриваются как условные (напомним, что для того, чтобы получит условную плотность, необходимо совместную плотность разделить на плотность распределения условия):  (3.7),  ( 3.8 ).

Полученное распределение огибающей  (3.7) носит название распределения Райса (иногда его называют обобщенным распределением Релея или распределением Релея-Райса). Частный случай этого распределения (3.8), соответствующий отсутствию сигнала () , называют распределением Релея.

Соответствующее плотностям ( 3.7 ) и ( 3.8 ) отношение правдоподобия и его логарифм имеют вид:  (3.9),  (3.10).

Формулы (3.9), (3.10) показывают, что поскольку в рассмотренном случае закон изменения фазы не имеет регулярной составляющей, информативной является только огибающая .

* + 1. Сигнал со случайной амплитудой

Рассмотрим теперь сигнал, у которого случайной является не только фаза , но и амплитуда . Здесь также возможны два варианта: амплитуда может быть неизвестной, но постоянной в течение одного цикла принятия решения (“дружно” флуктуирующий сигнал) или меняться по случайному закону от отсчета к отсчету (независимо флуктуирующий сигнал). Флуктуации первого типа могут быть связаны, напрмер, с изменением ракурса цели относительно РЛС, флуктуации второго типа – с вибрациями элементов цели, и т.п.

В случае “дружных” флуктуаций интеграл от многомерной (совместной) плотности огибающей  по распределению , как правило, в явном виде не вычисляется. Один из вариантов расчета отношения правдоподобия такого сигнала с помощью схемы обнаружения – оценивания мы рассмотрим несколько позже.

Случай независимых флуктуаций более прост для анализа, поскольку многомерная функция правдоподобия  факторизуется и усреднению подлежат одномерные функции правдоподобия огибающей . Если принять, что амплитуда  флуктуирует от отсчета к отсчету по закону Релея: , где - отношение мощностей сигнала и шума, то соответствующий интеграл выражается в явном виде:  (3.11),



 (3.12).

(функция правдоподобия  (3.12), являющаяся частным случаем (3.11) при , совпадает с (3.8).

Мы видим, что распределение отсчетов  как при наличии, так и при отсутствии сигналов является релеевским и отличается только значением энергетического параметра . Оптимальная обработка при этом сводится фактически к оценке мощности наблюдаемых отсчетов, т.е. суммированию квадратов их огибающих (так называемый энергетический приемник):  (3.13),  (3.14).

Таким образом, во всех рассмотренных случаях (см. формулы 3.3; 3.6; 3.10; 3.14) логарифм отношения правдоподобия является одномерной величиной и включает в себя два слагаемых, из которых отрицательное зависит только от величины расчетного сигнала, а положительное представляет собой функцию от произведения расчетного сигнала и наблюдаемого напряжения (в первом приближении можно считать, что это слагаемое характеризует их взаимную корреляцию). Очевидно, что в отсутствие сигнала среднее приращение решающей статистики отрицательно, поскольку положительное слагаемое мало, при наличии сигнала картина меняется на обратную.