**Курсовая работа**

На тему:

**«Решение математических задач с использованием программного пакета MathCad»**

Екатеринбург 2010

**1.** **Краткие теоретические сведения**

Дифференциальными уравнениями называются уравнения, в которых неизвестными являются функции одного или нескольких переменных, причем в уравнения входят не только сами функции, но и их производные. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка:

y(n) = f (x, y, y’, y’’… y(n-1))

Общее решение этого уравнения зависит от n-произвольных постоянных.

Точное решение дифференциального уравнения может быть найдено вручную, либо операторным методом в пакете MathCad. Также есть приближенные методы решения: решение с помощью рядов, численные методы и др. Каждый из этих методов определяет один или несколько бесконечных процессов, с помощью которых при выполнении определённых условий можно получить точное решение задачи. Для получения приближенного решения останавливаются на некотором шаге процесса.

Принцип операторного метода состоит в том, что при переводе функции дифференциального уравнения y(n) = f (x, y, y’, y’’… y(n-1)) в пространство Лапласа мы получаем изображение F(s), которое зависит только от одной переменной s. Отсюда, по теореме о единственности мы можем найти точное решение дифференциального уравнения.

Если решение ищется в виде бесконечного ряда, то за приближенное решение принимают конечный отрезок ряда. Например, пусть требуется найти решение дифференциального уравнения y' = f (x, у), удовлетворяющее начальным условиям у (х0) = y0, причём известно, что f (x, у) – аналитическая функция х, у в некоторой окрестности точки (х0, y0). Тогда решение можно искать в виде степенного ряда:

y (x) – y (x0) =



Коэффициенты Ak ряда могут быть найдены либо последовательным дифференцированием, либо с помощью метода неопределенных коэффициентов, который применяется в курсовой работе. Метод рядов позволяет находить решение лишь при малых значениях величины х – х0.

К численным методам относятся методы, позволяющие находить приближенное решение при некоторых значениях аргумента (т.е. получать таблицу приближённых значений искомого решения), пользуясь известными значениями решения в одной или нескольких точках. Такими методами являются, например, метод Эйлера, метод Рунге и целый ряд разностных методов (метод Рунге-Кутты).

Если a – точное решение, то абсолютной погрешностью приближенного значения a\* называют величину Д(а\*), которая определяется следующим образом:

|a\*-a| ≤ Д(a\*)

Относительной погрешностью Дa приближенного значения называют некоторую величину, которая определяется следующим образом:

|(a\*-a)/ a\* | ≤ д(a\*)

Таким образом, эти две погрешности связаны между собой:

д(a\*) = Д(a\*) / |a\*|

Относительную погрешность часто выражают в процентах. Числа a\* и Дa принято записывать с одинаковым количеством знаков после запятой.

# 2. Дифференциальное уравнение

Получить точное решение дифференциального уравнения вручную, операторным методом, приближенное решение с помощью рядов (до 5 элемента ряда) на интервале [0,1], численное решение методами Эйлера и Рунге-Кутты, представить совместное графическое решение ДУ всеми способами. Рассчитать локальную погрешность методов Эйлера и Рунге-Кутты. Рассчитать относительную и абсолютную погрешность всех методов с использованием точного решения.

Дано:

2x''+5x'=29cos t

x(0)= -1

x'(0)=0

## 2.1 Точное решение операторным методом

Пусть X(s) изображение, а х(t) оригинал.

Продифференцируем левую часть уравнения:

2x''+5x'=5\*(s2\*X-s\*x(0) – x'(0))+5\*(s\*X-x(0))

Подставим данные значения x(0) и x'(0) в уравнение и получим:

x''-3x'+2x= 2\*(s2\*X+s)+5\*(s\*X+1)=X\*(2s2+5s)+s\*2+5

Преобразуем правую часть уравнения в пространство Лапласа



Найдем значение изображения:

Given



Сопоставим изображению оригинал:



Найдем значения функции, построим её график:



дифференциальный уравнение эйлер операторный

## 2.2 Приближенное решение с помощью рядов



Запишем функцию в виде ряда:



Найдем производные первого и второго порядков от этой функции:



Разложим в ряд правую часть уравнения:



Полученные ряды подставим в исходное уравнение:



Найдем значения коэффициентов



Подставим найденные значения в разложение функции в ряд и построим график функции:



## 2.3 Численное решение методом Эйлера

Перепишем условие следующим образом:

x'=z

z'+ 5z=29cos t

z'=29cos t – 5z

Задаём начальные данные:



Находим значение x и x'



Для сравнения решим это дифференциальное уравнение с шагом 0,01. Построим график.

## 2.4 Численное решение методом Рунге-Кутты четвертого порядка

Определяем функцию D, задающую производные и находим значения функции. Строим график функции:



## 2.5 Расчет погрешности приближенного и численных методов

Таблица 1 – Значения функции

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Заданный интервал | Точное решение | Приближенное с помощью рядов | Метод Эйлера (шаг 0,1) | Метод Эйлера (шаг 0,01) | Метод Рунге Кутты |
| 0 | -1,000000 | -1,000000 | -1,000000 | -1,000000 | -1,000000 |
| 0,1 | -0,933240 | -0,933240 | -1,000000 | -0,938953 | -0,933221 |
| 0,2 | -0,753725 | -0,753766 | -0,855000 | -0,762488 | -0,753695 |
| 0,3 | -0,488339 | -0,488787 | -0,601974 | -0,498255 | -0,488302 |
| 0,4 | -0,159271 | -0,161707 | -0,270096 | -0,168991 | -0,159232 |
| 0,5 | 0,214972 | 0,205973 | 0,117337 | 0,206412 | 0,215012 |
| 0,6 | 0,618801 | 0,592753 | 0,541466 | 0,612091 | 0,618840 |
| 0,7 | 1,038952 | 0,975227 | 0,986812 | 1,034588 | 1,038989 |
| 0,8 | 1,464038 | 1,326187 | 1,440495 | 1,462384 | 1,464072 |
| 0,9 | 1,884213 | 1,612712 | 1,891659 | 1,885536 | 1,884245 |
| 1 | 2,290920 | 1,794271 | 2,331055 | 2,295416 | 2,290950 |

Таблица 2 – Локальная, абсолютная и относительная погрешность

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Абсолютная погрешность | | | | Относительная погрешность | | | |
| Решения с помощью рядов | метода Эйлера (шаг 0,1) | метода Эйлера (шаг 0,01) | метода Рунге Кутты | Решения с помощью рядов | метода Эйлера (шаг 0,1) | метода Эйлера (шаг 0,01) | метода Рунге Кутты |
| Локальная погрешность | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,000 |
| 0,000000 | 0,066760 | 0,005713 | -0,000019 | 0,0 | -6,7 | -0,6 | 0,002 |
| 0,000041 | 0,101275 | 0,008763 | -0,000030 | 0,0 | -11,8 | -1,1 | 0,004 |
| 0,000448 | 0,113635 | 0,009916 | -0,000037 | -0,1 | -18,9 | -2,0 | 0,008 |
| 0,002436 | 0,110825 | 0,009720 | -0,000039 | -1,5 | -41,0 | -5,8 | 0,024 |
| 0,008999 | 0,097635 | 0,008560 | -0,000040 | 4,4 | 83,2 | 4,1 | -0,019 |
| 0,026048 | 0,077335 | 0,006710 | -0,000039 | 4,4 | 14,3 | 1,1 | -0,006 |
| 0,063725 | 0,052140 | 0,004364 | -0,000037 | 6,5 | 5,3 | 0,4 | -0,004 |
| 0,137851 | 0,023543 | 0,001654 | -0,000034 | 10,4 | 1,6 | 0,1 | -0,002 |
| 0,271501 | -0,007446 | -0,001323 | -0,000032 | 16,8 | -0,4 | -0,1 | -0,002 |
| 0,496649 | -0,040135 | -0,004496 | -0,000030 | 27,7 | -1,7 | -0,2 | -0,001 |

## 2.6 Совместное графическое решение

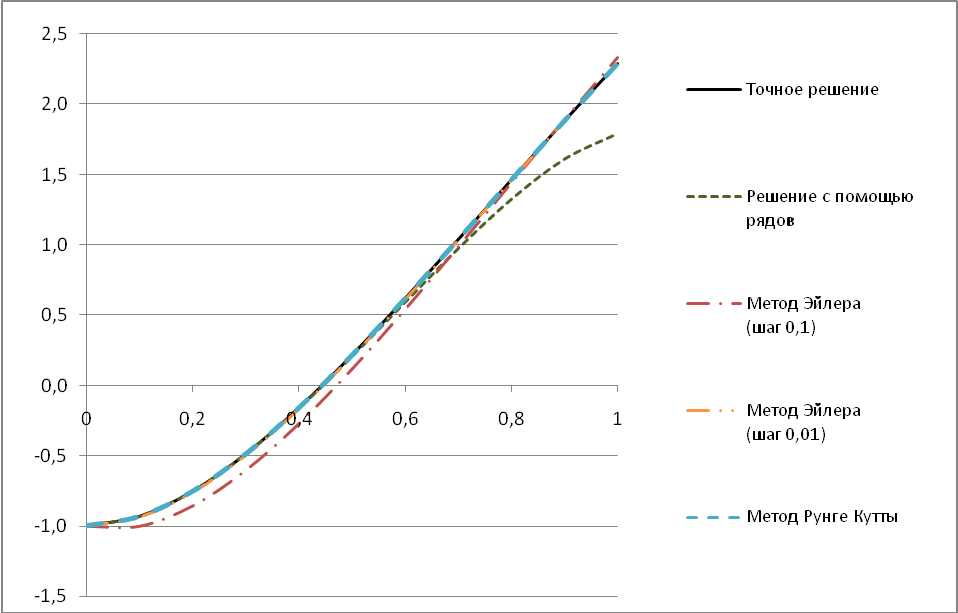


Рисунок 1 – Совместное графическое решение

Из всех методов наиболее точным оказался метод Рунге-Кутты, его максимальная относительная погрешность 0,024%, относительная погрешность приближенного метода составила 27,7%. Метод Эйлера с шагом 0,1 имеет наибольшую погрешность 83,2%, однако при уменьшении шага в до 0,01 его погрешность составляет всего 5,8%. Это подтверждает то, что погрешность метода Эйлера сильно зависит от принятого шага. Проанализировав графическое решение делаем вывод о том, что методы Эйлера и Рунге-Кутты повторяют форму кривой точного решения, а график приближенного решения с увеличением аргумента всё сильнее отклоняется от искомого графика – свидетельство того, что погрешность решения с помощью рядов зависит от количества членов ряда. Характер кривой также говорит о том, что точность приближенного решения с помощью рядов удовлетворительна только вблизи некоторой точки.

# 3. Система дифференциальных уравнений

Решить систему дифференциальных уравнений, получить точное решение вручную, операторным методом, приближенное решение с помощью рядов (до 5 элемента), численное решение методом Эйлера, Рунге-Кутты. Представить графическое совместное решение, рассчитать локальную, относительную и абсолютную погрешность решения.

Дано:

dx/dt=3x + y

dy/dt=5/2x – y + 2

x(0)=0

y(0)=1

## 3.1 Точное решение операторным методом

Пусть X(s) изображение, для оригинала x(t), Y(s) изображение для оригинала y(t). Перейдем от оригинала к изображению:



Найдем значения изображений:



Найдем значения функции и построим её график:



## 3.2 Приближенное решение с помощью рядов

Преобразуем систему таким образом что, получим дифференциальное уравнение второго порядка, зависящее только от x:

x''-2x'-11/2x-2=0

Алгоритм решения такой же, как и при решении дифференциального уравнения с правой частью специального вида, но без необходимости раскладывать правую часть.



## Выводы

Наименьшую погрешность имеет метод Рунге-Кутты четвертого порядка – для функции x(t) относительная погрешность на десятом шаге составляет 0,036%, для функции y(t) 0,0297%. Наибольшая погрешность у метода Эйлера с шагом 0,1 – для функции x(t) 70,8%, для функции y(t) 51,4%. При изменении шага до 0,01 погрешность существенно уменьшается до 6,6% и 5,3% соответственно. Вывод о влиянии шага на погрешность в методе Эйлера совпадает с выводами решения дифференциального уравнения – большую роль в точности этого метода играет шаг. Можно еще раз подтвердить вывод о том, что точность приближенного метода решения сильно зависит от того, на сколько членов будет разложена дифференциальная функция.