|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Пункт  назначения  Пункт  отправления | 1 | 2 | 3 | 4 | Запасы |
| 1 | 1 | 7 | 3 | 6 | 21 |
| 2 | 7 | 1 | 1 | 4 | 26 |
| 3 | 3 | 3 | 7 | 3 | 25 |
| 4 | 1 | 3 | 5 | 5 | 24 |
| Потребности | 25 | 19 | 24 | 28 | Σ = 96 |

# Допустимый план методом северо-западного угла

Сущность его состоит в следующем. Будем распределять груз, начиная с загрузки левой верхней, условно называемой северо-западной, клетки (1; 1), двигаясь затем от нее по строке вправо или по столбцу вниз. В клетку (1; 1) занесем меньшее из чисел a 1, b 1, т.е. x 11 =min (a 1, b 1). Если а 1 >b 1, то x 11 =b 1 и первый потребитель В 1 будет полностью удовлетворен. В дальнейшем 1-й столбец таблицы в расчет не принимается; в нем переменные. Двигаясь вправо по первой строке таблицы, заносим в соседнюю клетку (1; 2) меньшее из чисел (a 1 - b 1) и b 2, т.е. x 12 = min ((a 1 - b 1), b 2). Если (a 1 - b 1) <b 2, то запасы первого поставщика исчерпаны и первая строка таблицы в дальнейшем в расчет не принимается. Переходим к аналогичному распределению запаса груза второго поставщика. Если b 1 >a 1 то х 11 =min (a 1, b 1) =а 1. При этом запас первого поставщика будет исчерпан, а потому. Первая строка из дальнейшего рассмотрения исключается. Переходим к распределению запасов второго поставщика. В клетку (2; 1) заносим наименьшее из чисел (a 2, b 1 - а 1). Заполнив таким образом клетку (1; 2) или (2; 1), переходим к загрузке следующей клетки по второй строке либо по второму столбцу. Процесс распределения по второй, третьей и последующим строкам (столбцам) производится аналогично распределению по первой строке или первому столбцу до тех пор, пока не исчерпаются ресурсы.

Ai\* - излишек нераспределенного груза от поставщика Ai

Bj\* - недостача в поставке груза потребителю Bj

Помещаем в клетку (1,1) меньшее из чисел A1\*=21 и B1\*=25

Так как запасы поставщика A1 исчерпаны, то строка 1 в дальнейшем в расчет не принимается

Помещаем в клетку (2,1) меньшее из чисел A2\*=26 и B1\*=4

Так как спрос потребителя B1 удовлетворен, то столбец 1 в дальнейшем в расчет не принимается

Помещаем в клетку (2,2) меньшее из чисел A2\*=22 и B2\*=19

Так как спрос потребителя B2 удовлетворен, то столбец 2 в дальнейшем в расчет не принимается

Помещаем в клетку (2,3) меньшее из чисел A2\*=3 и B3\*=24

Так как запасы поставщика A2 исчерпаны, то строка 2 в дальнейшем в расчет не принимается

Помещаем в клетку (3,3) меньшее из чисел A3\*=25 и B3\*=21

Так как спрос потребителя B3 удовлетворен, то столбец 3 в дальнейшем в расчет не принимается

Помещаем в клетку (3,4) меньшее из чисел A3\*=4 и B4\*=28

Так как запасы поставщика A3 исчерпаны, то строка 3 в дальнейшем в расчет не принимается

Помещаем в клетку (4,4) меньшее из чисел A4\*=24 и B4\*=24

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Пункт  назначения  Пункт  отправления | 1 | 2 | 3 | 4 | Запасы |
| 1 | 1  21 | 7  - | 3  - | 6  - | 21 |
| 2 | 7  4 | 1  19 | 1  3 | 4  - | 26 |
| 3 | 3  - | 3  - | 7  21 | 3  4 | 25 |
| 4 | 1  - | 3  - | 5  - | 5  24 | 24 |
| Потребности | 25 | 19 | 24 | 28 | Σ = 96 |

Стоимость перевозок Z = 1⋅21+4⋅7+1⋅19+1⋅3+7⋅21+3⋅4+5⋅24 = 350

Допустимый план методом северо-западного угла

Алгоритм состоит из двух шагов:

Предварительный шаг

Общеповторяющийся шаг

Предварительный шаг:

Находим допустимый ациклический план.

Составляем систему потенциалов.

Анализируем систему на потенциальность.

Общеповторяющийся шаг:

Положительные разности , находим наибольшую, включаем эту клетку в набор и строим на ней цикл.



Означиваем цикл.

Выбираем наименьшее значение перевозки в клетках отрицательной полуцепи.

Из перевозок в каждой клетке отрицательной полуцепи вычитаем Θ, а к положительным перевозка прибавляется. Эта операция – сдвиг по циклу на величину Θ.

Пересчитываем систему потенциалов.

Проверяем систему на потенциальность.

Если система не потенциальна, то переходим к пункту 1 общеповторяющегося шага.

Полагая потенциал U1=0, определяем остальные потенциалы из соотношения Ui+Vj=Ci,j(i=1. . m, j=1. . n), просматривая все занятые клетки.

Потенциалы Ui, Vj:

U1=0 V1=C1,1-U1= 1 U2=C1,2-V1= 6 V2=C2,2-U2= - 5 V3=C2,3-U2= - 5 U3=C3,3-V3= 12 V4=C3,4-U3= - 9 U4=C4,4-V4= 14 Определяем значения оценок Si,j=Ci,j-(Ui+Vj) для всех свободных клеток S1,2 = c1,2 - (u1 + v2) = 12.

S1,3 = c1,3 - (u1 + v3) = 8.

S1,4 = c1,4 - (u1 + v4) = 15.

S2,4 = c2,4 - (u2 + v4) = 7.

S3,1 = c3,1 - (u3 + v1) = - 10.

S3,2 = c3,2 - (u3 + v2) = - 4.

S4,1 = c4,1 - (u4 + v1) = - 14.

S4,2 = c4,2 - (u4 + v2) = - 6.

S4,3 = c4,3 - (u4 + v3) = - 4.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 |
| A1 |  | 12 | 8 | 15 |
| A2 |  |  |  | 7 |
| A3 | -10 | -4 |  |  |
| A4 | -14 | -6 | -4 |  |

Если имеется несколько клеток с одним и тем же наименьшим значением оценки, то из них выбирается клетка, имеющая наименьший тариф. Наиболее потенциальной является клетка (4,1).

Для нее оценка равна - 14.

Строим для нее цикл, помечая клетки цикла знаками "плюс" и "минус".

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | Запасы груза |
| B1 | B2 | B3 | B4 |
| A1 | |  |  | | --- | --- | |  | 1 | | 21 |  | | |  |  | | --- | --- | |  | 7 | |  |  | | |  |  | | --- | --- | |  | 3 | |  |  | | |  |  | | --- | --- | |  | 6 | |  |  | | 21 |
| A2 | |  |  | | --- | --- | | - | 7 | | 4 |  | | |  |  | | --- | --- | |  | 1 | | 19 |  | | |  |  | | --- | --- | | + | 1 | | 3 |  | | |  |  | | --- | --- | |  | 4 | |  |  | | 26 |
| A3 | |  |  | | --- | --- | |  | 3 | |  |  | | |  |  | | --- | --- | |  | 3 | |  |  | | |  |  | | --- | --- | | - | 7 | | 21 |  | | |  |  | | --- | --- | | + | 3 | | 4 |  | | 25 |
| A4 | |  |  | | --- | --- | | + | 1 | |  |  | | |  |  | | --- | --- | |  | 3 | |  |  | | |  |  | | --- | --- | |  | 5 | |  |  | | |  |  | | --- | --- | | - | 5 | | 24 |  | | 24 |
| Потребность | 25 | 19 | 24 | 28 |  |

Делаем сдвиг по циклу на 4, прибавляя эту величину к грузу в клетках со знаком "плюс" и отнимая ее от груза в клетках со знаком "минус".

В результате перемещения по циклу получим новый план:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | Запасы груза |
| B1 | B2 | B3 | B4 |
| A1 | |  |  | | --- | --- | |  | 1 | | 21 |  | | |  |  | | --- | --- | |  | 7 | |  |  | | |  |  | | --- | --- | |  | 3 | |  |  | | |  |  | | --- | --- | |  | 6 | |  |  | | 21 |
| A2 | |  |  | | --- | --- | |  | 7 | |  |  | | |  |  | | --- | --- | |  | 1 | | 19 |  | | |  |  | | --- | --- | |  | 1 | | 7 |  | | |  |  | | --- | --- | |  | 4 | |  |  | | 26 |
| A3 | |  |  | | --- | --- | |  | 3 | |  |  | | |  |  | | --- | --- | |  | 3 | |  |  | | |  |  | | --- | --- | |  | 7 | | 17 |  | | |  |  | | --- | --- | |  | 3 | | 8 |  | | 25 |
| A4 | |  |  | | --- | --- | |  | 1 | | 4 |  | | |  |  | | --- | --- | |  | 3 | |  |  | | |  |  | | --- | --- | |  | 5 | |  |  | | |  |  | | --- | --- | |  | 5 | | 20 |  | | 24 |
| Потребность | 25 | 19 | 24 | 28 |  |

Стоимость перевозок Z = 294

Значение целевой функции изменилось на 56 единиц по сравнению с предыдущим этапом.

Этап 2

Полагая потенциал U1=0, определяем остальные потенциалы из соотношения Ui+Vj=Ci,j(i=1. . m, j=1. . n), просматривая все занятые клетки.

Потенциалы Ui, Vj:

U1=0 V1=C1,1-U1= 1 U4=C1,4-V1= 0 V4=C4,4-U4= 5 U3=C4,3-V4= - 2 V3=C3,3-U3= 9 U2=C3,2-V3= - 8 V2=C2,2-U2= 9 Определяем значения оценок Si,j=Ci,j-(Ui+Vj) для всех свободных клеток

S1,2 = c1,2 - (u1 + v2) = - 2.

S1,3 = c1,3 - (u1 + v3) = - 6.

S1,4 = c1,4 - (u1 + v4) = 1.

S2,1 = c2,1 - (u2 + v1) = 14.

S2,4 = c2,4 - (u2 + v4) = 7.

S3,1 = c3,1 - (u3 + v1) = 4.

S3,2 = c3,2 - (u3 + v2) = - 4.

S4,2 = c4,2 - (u4 + v2) = - 6.

S4,3 = c4,3 - (u4 + v3) = - 4.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 |
| A1 |  | -2 | -6 | 1 |
| A2 | 14 |  |  | 7 |
| A3 | 4 | -4 |  |  |
| A4 |  | -6 | -4 |  |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | Запасы груза |
| B1 | B2 | B3 | B4 |
| A1 | |  |  | | --- | --- | | - | 1 | | 21 |  | | |  |  | | --- | --- | |  | 7 | |  |  | | |  |  | | --- | --- | | + | 3 | |  |  | | |  |  | | --- | --- | |  | 6 | |  |  | | 21 |
| A2 | |  |  | | --- | --- | |  | 7 | |  |  | | |  |  | | --- | --- | |  | 1 | | 19 |  | | |  |  | | --- | --- | |  | 1 | | 7 |  | | |  |  | | --- | --- | |  | 4 | |  |  | | 26 |
| A3 | |  |  | | --- | --- | |  | 3 | |  |  | | |  |  | | --- | --- | |  | 3 | |  |  | | |  |  | | --- | --- | | - | 7 | | 17 |  | | |  |  | | --- | --- | | + | 3 | | 8 |  | | 25 |
| A4 | |  |  | | --- | --- | | + | 1 | | 4 |  | | |  |  | | --- | --- | |  | 3 | |  |  | | |  |  | | --- | --- | |  | 5 | |  |  | | |  |  | | --- | --- | | - | 5 | | 20 |  | | 24 |
| Потребность | 25 | 19 | 24 | 28 |  |

Если имеется несколько клеток с одним и тем же наименьшим значением оценки, то из них выбирается клетка, имеющая наименьший тариф. Наиболее потенциальной является клетка (1,3). Для нее оценка равна - 6.

Строим для нее цикл, помечая клетки цикла знаками "плюс" и "минус".

Делаем сдвиг по циклу на величину перевозок в 17 единиц, прибавляя эту величину к грузу в клетках со знаком "плюс" и отнимая ее от груза в клетках со знаком "минус".

В результате перемещения по циклу получим новый план:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | Запасы груза |
| B1 | B2 | B3 | B4 |
| A1 | |  |  | | --- | --- | |  | 1 | | 4 |  | | |  |  | | --- | --- | |  | 7 | |  |  | | |  |  | | --- | --- | |  | 3 | | 17 |  | | |  |  | | --- | --- | |  | 6 | |  |  | | 21 |
| A2 | |  |  | | --- | --- | |  | 7 | |  |  | | |  |  | | --- | --- | |  | 1 | | 19 |  | | |  |  | | --- | --- | |  | 1 | | 7 |  | | |  |  | | --- | --- | |  | 4 | |  |  | | 26 |
| A3 | |  |  | | --- | --- | |  | 3 | |  |  | | |  |  | | --- | --- | |  | 3 | |  |  | | |  |  | | --- | --- | |  | 7 | |  |  | | |  |  | | --- | --- | |  | 3 | | 25 |  | | 25 |
| A4 | |  |  | | --- | --- | |  | 1 | | 21 |  | | |  |  | | --- | --- | |  | 3 | |  |  | | |  |  | | --- | --- | |  | 5 | |  |  | | |  |  | | --- | --- | |  | 5 | | 3 |  | | 24 |
| Потребность | 25 | 19 | 24 | 28 |  |

Стоимость перевозок Z= 192

Значение целевой функции изменилось на 102 единиц по сравнению с предыдущим этапом.

Этап 3

Полагая потенциал U1=0, определяем остальные потенциалы из соотношения Ui+Vj=Ci,j(i=1. . m, j=1. . n), просматривая все занятые клетки.

Потенциалы Ui, Vj:

U1=0 V1=C1,1-U1= 1 V3=C1,3-U1= 3 U4=C1,4-V1= 0 U2=C3,2-V3= - 2 V2=C2,2-U2= 3 V4=C4,4-U4= 5 U3=C4,3-V4= - 2 Определяем значения оценок Si,j=Ci,j-(Ui+Vj) для всех свободных клеток

S1,2 = c1,2 - (u1 + v2) = 4.

S1,4 = c1,4 - (u1 + v4) = 1.

S2,1 = c2,1 - (u2 + v1) = 8.

S2,4 = c2,4 - (u2 + v4) = 1.

S3,1 = c3,1 - (u3 + v1) = 4.

S3,2 = c3,2 - (u3 + v2) = 2.

S3,3 = c3,3 - (u3 + v3) = 6.

S4,2 = c4,2 - (u4 + v2) = 0.

S4,3 = c4,3 - (u4 + v3) = 2.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 |
| A1 |  | 4 |  | 1 |
| A2 | 8 |  |  | 1 |
| A3 | 4 | 2 | 6 |  |
| A4 |  | 0 | 2 |  |

Так как все оценки Si,j>=0, то полученный план является оптимальным.

Транспортная задача решена.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщик | Потребитель | | | | Запасы груза |
| B1 | B2 | B3 | B4 |
| A1 | |  |  | | --- | --- | |  | 1 | | 4 |  | | |  |  | | --- | --- | |  | 7 | |  |  | | |  |  | | --- | --- | |  | 3 | | 17 |  | | |  |  | | --- | --- | |  | 6 | |  |  | | 21 |
| A2 | |  |  | | --- | --- | |  | 7 | |  |  | | |  |  | | --- | --- | |  | 1 | | 19 |  | | |  |  | | --- | --- | |  | 1 | | 7 |  | | |  |  | | --- | --- | |  | 4 | |  |  | | 26 |
| A3 | |  |  | | --- | --- | |  | 3 | |  |  | | |  |  | | --- | --- | |  | 3 | |  |  | | |  |  | | --- | --- | |  | 7 | |  |  | | |  |  | | --- | --- | |  | 3 | | 25 |  | | 25 |
| A4 | |  |  | | --- | --- | |  | 1 | | 21 |  | | |  |  | | --- | --- | |  | 3 | |  |  | | |  |  | | --- | --- | |  | 5 | |  |  | | |  |  | | --- | --- | |  | 5 | | 3 |  | | 24 |
| Потребность | 25 | 19 | 24 | 28 |  |

Стоимость перевозок F= 192

Метод минимального элемента

1111 33333 4 55 6 777

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Пункт  назначения  Пункт  отправления | 1 | 2 | 3 | 4 | Запасы |
| 1 | 1  21 | 7  - | 3  - | 6  - | 21 |
| 2 | 7  - | 1  19 | 1  7 | 4  - | 26 |
| 3 | 3  - | 3  - | 7  - | 3  25 | 25 |
| 4 | 1  4 | 3  - | 5  17 | 5  3 | 24 |
| Потребности | 25 | 19 | 24 | 28 | Σ = 96 |

Z = 1⋅22+1⋅19+1⋅7+3⋅25+1⋅4+5⋅17+5⋅3=226, в методе северо-западного угла стоимость перевозки была выше и составляла 350.

# Распределительный метод

Распределительный метод представляет собой набор следующих действий: вначале строится исходный опорный план перевозок по одному из вышеизложенных правил, а затем последовательно производится его улучшение до получения оптимального. Для этого для каждой свободной клетки строят замкнутый цикл. Если в матрице перевозок содержится опорный план, то для каждой свободной клетки можно образовать и притом только один замкнутый цикл, содержащий эту свободную клетку и некоторую часть занятыx клеток.

Тарифы в клетках, находящихся в нечетных вершинах цикла, берем со знаком плюс, а в четных - со знаком минус. По каждому циклу подсчитываем алгебраическую сумму S ij тарифов.

Если замкнутый цикл имеет вид: (i, j) - >(k, j) - >(k, l) - >(t, l) - >... ->(u, v) - >(i, v), то S ij =C ij - C kj + C kl - C tl +... + C uv - C iv, где (i,j) - свободная клетка.

Если алгебраическая сумма S ij отрицательна, то путем изменения значений, стоящих в клетках замкнутого цикла, можно получить план с меньшим значением целевой функции. Критерием оптимальности при нахождении минимума функции служит неотрицательность алгебраических сумм S ij. Если указанное требование не соблюдено, план не оптимален и подлежит улучшению.

Вычисления при решении транспортной задачи распределительным методом ведутся по следующему алгоритму:

исходные данные задачи располагают в распределительной таблице;

строят исходный опорный план по правилу "северо-западного угла", или по правилу "минимального элемента", или методом Фогеля; при этом должны оказаться занятыми r=m+n-1 клеток. Однако, если опорный план является вырожденным, то это условие не соблюдается. Для сохранения числа занятых клеток r=m+n-1 неизменным проделывают следующие шаги: в таблице отыскивают клетку, имеющую минимальный тариф и не образующую цикла с занятыми клетками, помещают в нее базисный нуль и считают ее в дальнейшем занятой. Процесс поиска таких клеток продолжается до тех пор, пока число занятых клеток не станет равным m+n-1;

производят оценку первой свободной клетки путем построения замкнутого цикла и вычисления по этому циклу величины S ij. Если S ij <0, то переходят к следующему пункту алгоритма;

перемещают по циклу количество груза, равное наименьшему из чисел, размещенных в четных клетках цикла (в клетках со знаком минус). Далее возвращаются к пункту с. Если S ij >=0, то оценивают следующую свободную клетку, и т.д., пока не обнаружат клетку с отрицательной оценкой. Среди всех клеток с oценкой меньше нуля нужно найти клетку с наибольшим нарушением оптимальности, т.е. клетку с наименьшей оценкой. Если, наконец, оценки всех свободных клеток окажутся неотрицательными, то оптимальное решение найдено.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Пункт  назначения  Пункт  отправления | 1 | 2 | 3 | 4 | Запасы |
| 1 | 1  21 | 7  - | 3  - | 6  - | 21 |
| 2 | 7  - | 1  19 | 1  7 | 4  - | 26 |
| 3 | 3  - | 3  - | 7  - | 3  25 | 25 |
| 4 | 1  4 | 3  - | 5  17 | 5  3 | 24 |
| Потребности | 25 | 19 | 24 | 28 | Σ = 96 |

(1,2) = c1,2-c1,1+c4,1-c4,3+c2,3-c2,2 = 2 (1,3) = c1,3-c1,1+c4,1-c4,3 = - 2 (1,4) = c1,4-c1,1+c4,1-c4,4 = 1 (2,1) = c2,1-c2,3+c4,3-c4,1 = 10 (2,4) = c2,4-c2,3+c4,3-c4,4 = 3 (3,1) = c3,1-c3,4+c4,4-c4,1 = 4 (3,2) = c3,2-c3,4+c4,4-c4,3+c2,3-c2,2 = 0 (3,3) = c3,3-c3,4+c4,4-c4,3 = 4 (4,2) = c4,2-c4,3+c2,3-c2,2 = - 2

наименьшая перевозка 17, делаем сдвиг

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Пункт  назначения  Пункт  отправления | 1 | 2 | 3 | 4 | Запасы |
| 1 | 1  4 | 7  - | 3  17 | 6  - | 21 |
| 2 | 7  - | 1  19 | 1  7 | 4  - | 26 |
| 3 | 3  - | 3  - | 7  - | 3  25 | 25 |
| 4 | 1  21 | 3  - | 5  - | 5  3 | 24 |
| Потребности | 25 | 19 | 24 | 28 | Σ = 96 |

(1,2) = c1,2-c1,3+c2,3-c2,2 = 4 (1,4) = c1,4-c1,1+c4,1-c4,4 = 1 (2,1) = c2,1-c2,3+c1,3-c1,1 = 8 (2,4) = c2,4-c2,3+c1,3-c1,1+c4,1-c4,4 = 1 (3,1) = c3,1-c3,4+c4,4-c4,1 = 4 (3,2) = c3,2-c3,4+c4,4-c4,1+c1,1-c1,3+c2,3-c2,2 = 2 (3,3) = c3,3-c3,4+c4,4-c4,1+c1,1-c1,3 = 6 (4,2) = c4,2-c4,1+c1,1-c1,3+c2,3-c2,2 = 0 (4,3) = c4,3-c4,1+c1,1-c1,3 = 2

Оптимальный план получившийся распределительным методом, аналогичен оптимальному плану, получившемуся методом потенциалов