**Міністерство освіти і науки України**

**Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького**

**Факультет інформаційних технологій і**

**біомедичної кібернетики**

**РОЗРАХУНКОВА РОБОТА**

**з курсу „Математичне моделювання економічних систем”**

студента 4-го курсу спеціальності

«інтелектуальні системи прийняття рішень»

Валяєва Олександра В’ячеславовича

**Черкаси – 2006 р.**

**Зміст**

Зміст

Завдання 1. Задача лінійного програмування

Завдання 2. Задача цілочислового програмування

Завдання 3. Задача дробово-лінійного програмування

Завдання 4. Транспортна задача

Завдання 5. Задача квадратичного програмування

Список використаної літератури

**Завдання 1. Задача лінійного програмування**

 Для заданої задачі лінійного програмування побудувати двоїсту задачу. Знайти розв’язок прямої задачі геометричним методом і симплекс-методом. Знайти розв’язок двоїстої задачі, використовуючи результати розв’язування прямої задачі симплекс-методом:

3. ,



**Розв′язання геометричним методом**

Побудуємо прямі, рівняння яких одержуються внаслідок заміни в обмеженнях знаків нерівностей на знаки рівностей.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **I:** |  | 6 | 0 |
|  |  | 0 | 9 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **II:** |  | 0 | -6 |
|  |  | 6 | 0 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **III:** |  | 0 | 4 |
|  |  | 4 | 0 |

Визначимо півплощини, що задовольняють нашим нерівностям.

Умовам невід’ємності та відповідає перша чверть.



Заштрихуємо спільну частину площини, що задовольняє всім нерівностям.

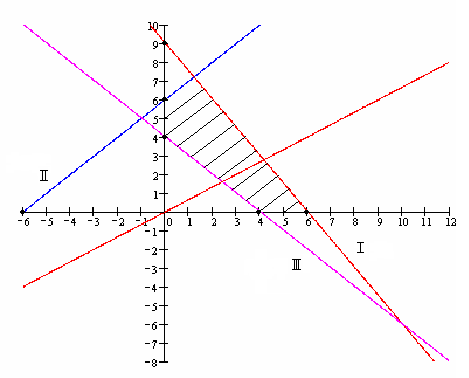
Побудуємо вектор нормалі .



Максимального значення функція набуває в точці перетину прямих *I* та *II*.

Знайдемо координати цієї точки.

Приведемо систему до канонічного вигляду



X2

X\*

X1

**Відповідь:**



**Розв′язання симплекс-методом**

Приведемо систему рівнянь до канонічного вигляду



x(0)=(0,0,18,6,0,4)



Цільова функція



Побудуємо симплекс-таблицю

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| I | базис | Cб | P0 | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 | -M |
| P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | P6 |
| 1 | P3 | 0 | 18 | 3 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | P4 | 0 | 6 | -1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | P6 | -M | 4 | 1 | 1 | 0 | 0 | -1 | 1 |
| 4 |  |  | 0 | -2 | -3 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 |  |  | -4 | -1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 |

Отриманий план не оптимальний

Обраний ключовий елемент (3,2)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| I | базис | Cб | P0 | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 | -M |
| P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | P6 |
| 1 | P3 | 0 | 10 | 1 | 0 | 1 | 0 | 2 | -2 |
| 2 | P4 | 0 | 2 | -2 | 0 | 0 | 1 | 1 | -1 |
| 3 | P2 | 3 | 4 | 1 | 1 | 0 | 0 | -1 | -1 |
| 4 |  |  | 12 | 1 | 0 | 0 | 0 | -3 | -3 |
| 5 |  |  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 |

Отриманий план не оптимальний

Обраний ключовий елемент (2,5)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| I | базис | Cб | P0 | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 | -M |
| P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | P6 |
| 1 | P3 | 0 | 6 | 5 | 0 | 1 | -2 | 0 | 0 |
| 2 | P5 | 0 | 2 | -2 | 0 | 0 | 1 | 1 | -1 |
| 3 | P2 | 3 | 6 | -1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 4 |  |  | 18 | -5 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 |
| 5 |  |  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 |

Отриманий план не оптимальний

Обраний ключовий елемент (1,1)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| I | базис | Cб | P0 | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 | -M |
| P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | P6 |
| 1 | P1 | 2 | 6/5 | 1 | 0 | 1/5 | -2/5 | 0 | 0 |
| 2 | P5 | 0 | 22/5 | 0 | 0 | 2/5 | 1/5 | 1 | -1 |
| 3 | P2 | 3 | 36/5 | 0 | 1 | 1/5 | 3/5 | 0 | 0 |
| 4 |  |  | 24 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 5 |  |  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

План оптимальний

**Розв’язок**: X\*(,) F\*=24;



**Розв’язок двоїстої задач**

Побудуємо двоїсту функцію

3. ,



Система обмежень



Скористаємось теоремою

*Якщо задача лінійного програмування в канонічній формі (7)-(9) має оптимальний план , то*   *є оптимальним планом двоїстої задачі*



, ,



**Розв’язок:**



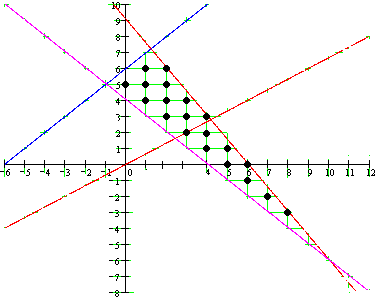
Fmin\*= 9,6;

**Завдання 2. Задача цілочислового програмування**

Для задачі із завдання 1, як для задачі цілочислового програмування, знайти розв’язки геометричним методом і методом Гоморі.

**Розв′язання геометричним методом**

,



**Відповідь:**



**Розв′язання методом Гоморі**

Наведемо останню симплекс-таблицю

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| I | базис | Cб | P0 | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 | -M |
| P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | P6 |
| 1 | P1 | 2 | 6/5 | 1 | 0 | 1/5 | -2/5 | 0 | 0 |
| 2 | P5 | 0 | 22/5 | 0 | 0 | 2/5 | 1/5 | 1 | -1 |
| 3 | P2 | 3 | 36/5 | 0 | 1 | 1/5 | 3/5 | 0 | 0 |
| 4 |  |  | 24 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 5 |  |  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Побудуємо нерівність Гоморі за першим аргументом.



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| I | базис | Cб | P0 | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | P7 |
| 1 | P1 | 2 | 6/5 | 1 | 0 | 1/5 | -2/5 | 0 | 0 |
| 2 | P5 | 0 | 22/5 | 0 | 0 | 2/5 | 1/5 | 1 | 0 |
| 3 | P2 | 3 | 36/5 | 0 | 1 | 1/5 | 3/5 | 0 | 0 |
| 4 | P7 | 0 | -1/5 | 0 | 0 | -1/5 | -3/5 | 0 | 1 |
| 5 |  |  | 24 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |

Обраний розв’язковий елемент (4,4)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| I | базис | Cб | P0 | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | P7 |
| 1 | P1 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 |
| 2 | P5 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 11/5 | 1 | 0 |
| 3 | P2 | 3 | 7 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | P4 | 0 | 2 | 0 | 0 | 1 | 3 | 0 | 1 |
| 5 |  |  | 14 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 |

Отриманий план являється оптимальним і цілочисельним.

**Розв’язок**: X\*(1,7) Fmax\*=23;

Відповідь: цілочисельною точкою максимуму даної задачі є точка (1,7)

**Завдання 3. Задача дробово-лінійного програмування**

Для задачі дробово-лінійного програмування знайти розв’язки геометричним методом і симплекс-методом:

,



**Розв′язання геометричним методом**

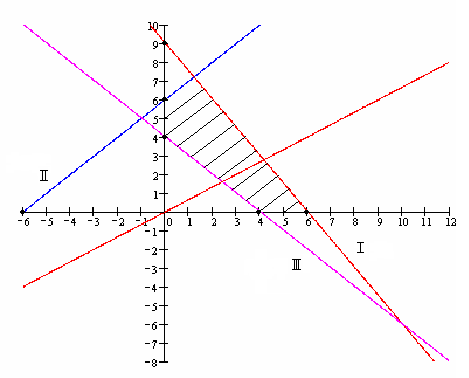


Визначимо, в яку сторону потрібно обертати пряму навколо початку координат, щоб значення цільової функції збільшувалось. Таким чином ми визначимо яка з крайніх точок є точкою максимуму.

*f*(1;0) = 2/3 *f*(0;1) = 3/7

Тобто при крутінні прямої проти годинникової стрілки значення цільової функції зменшується.

Використаємо результати обчислень і геометричних побудов з попереднього завдання.



З графіка очевидно, що розв’язок лежить на перетині двох прямих. Для визначення точки перетину прямої *І* та *ІІ* розв′яжемо систему з двох рівнянь.



Відповідь: функція набуває максимального значення при *x*1=6/5, *x*2=36/5.

**Розв′язання симплекс-методом**

Перейдемо від задачі дробово-лінійного програмування до задачі лінійного програмування.

Вводим заміну:



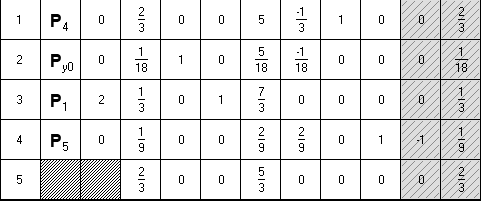
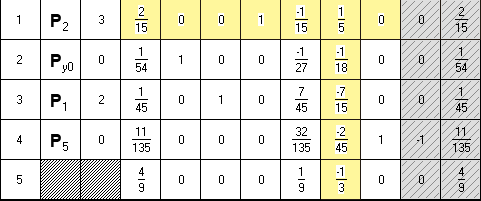
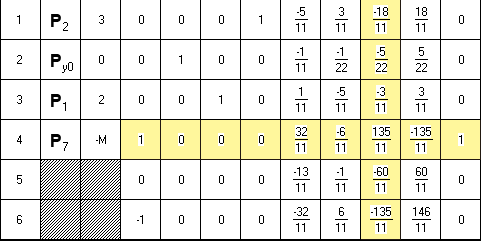
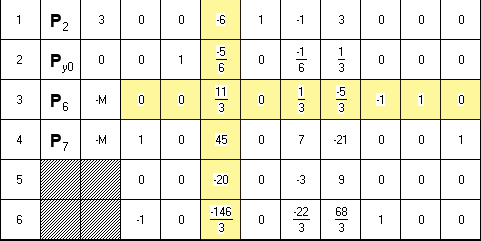
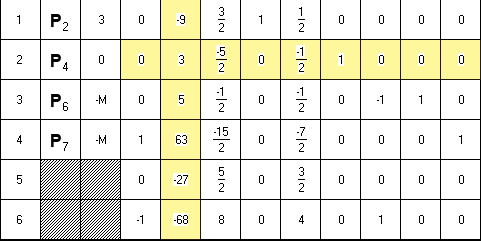
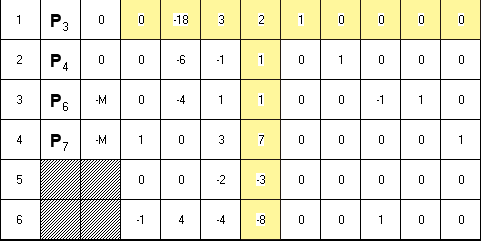
Вводим ще одну заміну:



Після замін наша задача має такий вигляд:



Приведемо її до канонічної форми і доповнимо її базисами:



Повернемось до заміни:

x1=0 x2=6

**Завдання 4. Транспортна задача**

Для заданих транспортних задач скласти математичну модель і розв’язати їх методом потенціалів, використавши для визначення початкового плану метод мінімального елемента або північно-західного кута.

1. Запаси деякого однорідного продукту знаходяться на трьох пунктах постачання (базах) A1, A2, A3 і цей продукт потрiбно доставити в три пункти споживання (призначення) B1, B2, B3. Задача полягає в тому, щоб визначити, яку кiлькiсть продукту потрiбно перевезти з кожного пункту постачання (бази) до кожного пункту споживання (призначення) так, щоб забезпечити вивезення всього наявного продукту з пунктів постачання, задовільнити повністю потреби кожного пункту споживання і при цьому сумарна вартiсть перевезень була б мiнiмальною (зворотні перевезення виключаються). Вартість перевезень *сij* (у грн.) з бази *Аi* до пункту призначення *Bj* вказана в таблиці, де також наведені дані про запаси *ai* (у тонанх) продукту і його потреби (у тонах) *bj*.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Пункти | Пункти споживання | | | Запаси |
| постачання | B1 | B2 | B3 |  |
| A1 | 3 | 5 | 7 | 270 |
| A2 | 6 | 9 | 4 | 180 |
| A3 | 11 | 8 | 10 | 300 |
| Потреби | 260 | 280 | 300 |  |

Для даної транспортної задачі не виконується умова балансу , тому введемо додатковий пункт постачання з запасами 840-750=90 і тарифами С4s=0 (i=1,2,3). Тоді одержимо замкнену транспортну задачу, яка має розв’язок. Її математична модель має вигляд:



хi,



j ≥ 0, 1≤ i ≤4, 1≤ j ≤3.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Пункти | Пункти споживання | | | Запаси |
| постачання | B1 | B2 | B3 |  |
| A1 | 3 | 5 | 7 | 270 |
| A2 | 6 | 9 | 4 | 180 |
| A3 | 11 | 8 | 10 | 300 |
| A4 | 0 | 0 | 0 | 90 |
| Потреби | 260 | 280 | 300 | 840  840 |

За методом північно-західного кута знайдемо опорний план

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Пункти | Пункти споживання | | | Запаси |
| постачання | B1 | B2 | B3 |  |
| A1 | 3  260 | 5  10 | 7 | 270 |
| A2 | 6 | 9  180 | 4 | 180 |
| A3 | 11 | 8  90 | 10  210 | 300 |
| A4 | 0 | 0 | 0  90 | 90 |
| Потреби | 260 | 280 | 300 | 840  840 |

За методом північно-західного кута опорний план має вигляд:

.



F=3\*260+5\*10+9\*180+8\*90+10\*210+0\*90=5270

Перевіримо чи буде він оптимальним.

Знаходимо потенціали для пунктів постачання

Для тих клітинок, де, розв’яжемо систему рівнянь



Знаходимо з системи:

.



Для тих клітинок, де, знайдемо числа



Оскільки , то план Х1 не є оптимальним. Будуємо цикл перерахунку



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Пункти | Пункти споживання | | | | | | Запаси | |
| постачання | B1 | | B2 | | B3 | |  | |
| A1 | 3 |  | 5 |  | 7 | 0 | | 270 | |
|  | 260 |  | 10 |  |  | |
| A2 | 6 | 1 | 9 |  | 4 | 7 | | 180 | |
|  |  | - | 180 | + |  | |
| A3 | 11 | -5 | 8 |  | 10 |  | | 300 | |
|  |  | + | 90 | - | 210 | |
| A4 | 0 | -4 | 0 | -2 | 0 |  | | 90 | |
|  |  |  |  |  | 90 | |
| Потреби | 260 | | 280 | | 300 | | 840  840 | |

В результаті перерахунку отримаємо

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Пункти | Пункти споживання | | | Запаси |
| постачання | B1 | B2 | B3 |  |
| A1 | 3  260 | 5  10 | 7 | 270 |
| A2 | 6 | 9 | 4  180 | 180 |
| A3 | 11 | 8  270 | 10  30 | 300 |
| A4 | 0 | 0 | 0  90 | 90 |
| Потреби | 260 | 280 | 300 | 840  840 |

Наступний опорний план



F=3\*260+5\*10+9\*180+8\*90+10\*210+0\*90=4010

Для тих клітинок, де, розв’яжемо систему рівнянь



Знаходимо з системи:

.



Для тих клітинок, де, знайдемо числа



**Отже план є оптимальним F=4010**



**Завдання 5. Задача квадратичного програмування**

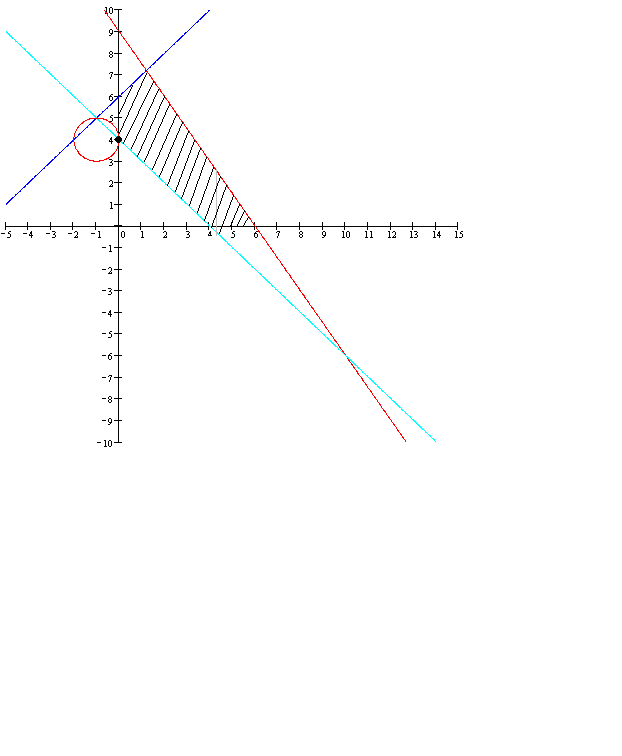
Розв’язати задачу квадратичного програмування геометричним методом та аналітичним методом, використовуючи функцію Лагранжа і теорему Куна-Таккера:

**Розв’язання графічним методом**

,



Графік кола має центр в точці (-1, 4)



**X\* (0 , 4); F\*(X\*)=-16**

**Розв’язання аналітичним методом**

,



Складемо функцію Лагранжа:



Система обмежень набуде вигляду:



Перенесемо вільні члени вправо, і при необхідності домножимо на -1



Зведемо систему обмежень до канонічного вигляду



Введемо додаткові змінні для утворення штучного базису



Розв’яжемо задачу лінійного програмування на знаходження мінімуму.

Введемо додаткові прямі обмеження на змінні.

,



Вектори з коефіцієнтів при невідомих:



Розв’язуємо отриману задачу звичайним симплекс-методом

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| I | базис | Cб | P0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | M | M |
| Px1 | Px2 | Py1 | Py2 | Py3 | Pu1 | Pu2 | Pv1 | Pv2 | Pv3 | Pz1 | Pz2 |
| 1 | Pz1 | M | 2 | -2 | 0 | -3 | 1 | 1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | Pu2 | 0 | 8 | 0 | 2 | 2 | 1 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | Pv1 | 0 | 18 | -3 | -2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | Pv2 | 0 | 6 | -1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | Pz2 | M | 4 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 |
| 5 |  |  |  | -M | M | -3M | M | M | -M | 0 | 0 | 0 | -M | 0 | 0 |

Обраний розв’язковий елемент (5,2)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| I | базис | Cб | P0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | M | M |
| Px1 | Px2 | Py1 | Py2 | Py3 | Pu1 | Pu2 | Pv1 | Pv2 | Pv3 | Pz1 | Pz2 |
| 1 | Pz1 | M | 2 | -2 | 0 | -3 | 1 | 1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | Pu2 | 0 | 0 | -2 | 0 | 2 | 1 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 |
| 3 | Pv1 | 0 | 26 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | -2 | 0 | 0 |
| 4 | Pv2 | 0 | 2 | -2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 5 | Px2 | 0 | 4 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 |
| 5 |  |  | 2М | -2М | 0 | -3М | М | M | -М | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Обраний розв’язковий елемент (2,4)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| I | базис | Cб | P0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | M | M |
| Px1 | Px2 | Py1 | Py2 | Py3 | Pu1 | Pu2 | Pv1 | Pv2 | Pv3 | Pz1 | Pz2 |
| 1 | Pz1 | M | 2 | 0 | 0 | -5 | 0 | 2 | -1 | -1 | 0 | 0 | -2 | 1 |  |
| 2 | Py2 | 0 | 0 | -2 | 0 | 2 | 1 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 | 0 |  |
| 3 | Pv1 | 0 | 26 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | -2 | 0 |  |
| 4 | Pv2 | 0 | 2 | -2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |  |
| 5 | Px2 | 0 | 4 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 |  |
| 5 |  |  | 2M | 0 | 0 | -5M | 0 | 2M | -M | -M | 0 | 0 | -2M | 0 |  |

Обраний розв’язковий елемент (1,5)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| I | базис | Cб | P0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | M | M |
| Px1 | Px2 | Py1 | Py2 | Py3 | Pu1 | Pu2 | Pv1 | Pv2 | Pv3 | Pz1 | Pz2 |
| 1 | Py3 | 0 | 1 | 0 | 0 | -5/2 | 0 | 1 | -1/2 | -1/2 | 0 | 0 | -1 |  |  |
| 2 | Py2 | 0 | 1 | -2 | 0 | -1/2 | 1 | 0 | -1/2 | -1/2 | 0 | 0 | 1 |  |  |
| 3 | Pv1 | 0 | 26 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | -2 |  |  |
| 4 | Pv2 | 0 | 2 | -2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |  |  |
| 5 | Px2 | 0 | 4 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 |  |  |
| 5 |  |  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |  |

План отриманий в результаті розв’язування задачі симплекс-методом, не є оптимальним так як він не задовольняє умови:



Отже перерахуємо симплекс-таблицю ще раз.

Обраний розв’язковий елемент (2,7)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| I | базис | Cб | P0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Px1 | Px2 | Py1 | Py2 | Py3 | Pu1 | Pu2 | Pv1 | Pv2 | Pv3 |
| 1 | Py3 | 0 | 10 | 0 | 2 | -3 | 1 | 1 | -1 | 0 | 0 | 0 | -2 |
| 2 | Pu2 | 0 | 18 | 0 | 4 | -1 | 2 | 0 | -1 | 1 | 0 | 0 | -2 |
| 3 | Pv1 | 0 | 30 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | -3 |
| 4 | Pv2 | 0 | 10 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 |
| 5 | Px2 | 0 | 4 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 |
| 5 |  |  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Отриманий план оптимальний X\* (0,4); F\*(X\*)=-16

**Список використаної літератури**

1. Карманов В. Г. Математическое программирование: Учеб. пособие. — 5-е издание., стереотип. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 264 с.
2. Моисеев Н. Н., Иванилов Ю. П., Столярова Е. М. Методы оптимизации —М.: Наука, 1978. — 352 с.