Глава Математическое моделирование системных элементов

Выдающийся итальянский физик и астроном, один из основателей точного естествознания, Галилео Галилей (1564 - 1642гг.) говорил, что "Книга природы написана на языке математики". Почти через двести лет родоначальник немецкой классической философии Иммануил Кант (1742 - 1804гг.) утверждал, что "Во всякой науке столько истины, сколько в ней математики". Наконец, ещё через почти сто пятьдесят лет, практически уже в наше время, немецкий математик и логик Давид Гильберт (1862 - 1943гг.) констатировал: "Математика - основа всего точного естествознания".

Приведенные высказывания великих ученых, без дополнительных комментариев, дают полное представление о роли и значении математики как в научно-теоретической, так и предметно-практической деятельности специалистов.

1.1. Три этапа математизации знаний

Современная методология науки выделяет три этапа математизации знаний: математическая обработка эмпирических (экспериментальных) данных, моделирование и относительно полные математические теории.

*Первый этап -* это математическая, чаще всего именно количественная обработка эмпирических (экспериментальных) данных. Это этап выявления и выделения чисто феноменологических функциональных взаимосвязей (корреляций) между входными сигналами (входами ) и выходными реакциями (откликами ) на уровне целостного объекта (явления, процесса), которые наблюдают в экспериментах с объектами-оригиналами . Данный этап математизации имеет место во всякой науке и может быть определён как этап первичной обработки её эмпирического материала.



*Второй этап* математизации знаний определим как модельный. На этом этапе не-которые объекты выделяются (рассматриваются) в качестве основных, базовых (фун-даментальных), а свойства (атрибуты), характеристики и параметры других объектов исследования объясняются и выводятся исходя из значений, определяемых первыми (назовем их оригиналами). Второй этап математизации характеризуется ломкой старых теоретических концепций, многочисленными попытками ввести новые, более глубокие и фундаментальные. Таким образом, на "модельном" этапе математизации, т.е. этапе математического моделирования, осуществляется попытка теоретического воспроизве-дения, "теоретической реконструкции" некоторого интересующего исследователя объек-та-оригинала в форме другого объекта - математической модели.

*Третий этап -* это этап относительно полной математической теории данного уровня организации материи в данной или рассматриваемой предметной области. Третий этап предполагает существование логически полной системы понятий и аксиоматики. Математическая теория даёт методологию и язык, пригодные для описания явлений, процессов и систем различного назначения и природы. Она даёт возможность преодолевать узость мышления, порождаемую специализацией.

1.2. Математическое моделирование и модель

Математическое моделирование - это теоретико-экспериментальный метод познавательно-созидательной деятельности, это метод исследования и объяснения явлений, процессов и систем (объектов-оригиналов) на основе создания новых объектов - математических моделей.

Под математической моделью принято понимать совокупность соотношений (уравнений, неравенств, логических условий, операторов и т.п.), определяющих характеристики состояний объекта моделирования, а через них и выходные значения - реакции

, в зависимости от параметров объекта-оригинала , входных воздействий , начальных и граничных условий, а также времени.



Математическая модель, как правило, учитывает лишь те свойства (атрибуты) объекта-оригинала , которые отражают, определяют и представляют интерес с точки зрения целей и задач конкретного исследования. Следовательно, в зависимости от целей моделирования, при рассмотрении одного и того же объекта-оригинала с различных точек зрения и в различных аспектах, последний может иметь различные математические описания и, как следствие, быть представлен различными математическими моделями.



Принимая во внимание изложенное выше, дадим наиболее общее, но в то же время строгое конструктивное определение математической модели, сформулированное П.Дж.Коэном.

**Определение 2.** *Математическая модель - это формальная система, представляющая собой конечное собрание символов и совершенно строгих правил оперирования этими символами в совокупности с интерпретацией свойств определенного объекта некоторыми отношениями, символами или константами.*

Как следует из приведенного определения, конечное собрание символов (алфавит) и совершенно строгих правил оперирования этими символами ("грамматика" и "синтаксис" математических выражений) приводят к формированию абстрактных математических объектов (АМО). Только интерпретация делает этот абстрактный объект математической моделью.

Таким образом, исходя из принципиально важного значения интерпретации в тех-нологии математического моделирования, рассмотрим ее более подробно.

1.3. Интерпретации в математическом моделировании

Интерпретация (от латинского "interpretatio" - разъяснение, толкование, истолкование) определяется как совокупность значений (смыслов), придаваемых каким-либо образом элементам некоторой системы (теории), например, формулам и отдельным символам. В математическом аспекте интерпретация - это экстраполяция исходных положений какой-либо формальной системы на какую-либо содержательную систему, исходные положения которой определяются независимо от формальной системы. Следовательно, можно утверждать, что интерпретация - это установление соответствия между некоторой формальной и содержательной системами. В тех случаях, когда формальная система оказывается применимой (интерпретируемой) к содержательной системе, т.е. установлено что между элементами формальной системы и элементами содержательной системы существует взаимно однозначное соответствие, все исходные положения формальной системы получают подтверждение в содержательной системе. Интерпретация считается полной, если каждому элементу формальной системы соответствует некоторый элемент (интерпретант) содержательной системы. Если указанное условие нарушается, имеет место частичная интерпретация.

При математическом моделировании в результате интерпретации задаются значения элементов математических выражений (символов, операций, формул) и целостных конструкций.

Основываясь на приведенных общих положениях, определим содержание интерпретации применительно к задаче математического моделирования.

**Определение 3.** *Интерпретация в математическом моделировании - это информационный процесс преобразования абстрактного математического объекта (АМО) в конкретную математическую модель (ММ) конкретного объекта на основе отображения*

*непустого информационного множества данных и знаний, определяемого АМО и называемого областью интерпретации, в кообласть - информационное множество данных и знаний, определяемое предметной областью и объектом моделирования и называемое областью значений интерпретации.*

Таким образом, интерпретацию следует рассматривать как один из основополагающих механизмов (инструментов) технологии математического (научного) моделирования.

Именно интерпретация, придавая смысл и значения элементам (компонентам) математического выражения, делает последнее математической моделью реального объекта.

1.4. Виды и уровни интерпретаций

Создание математической модели системного элемента - многоэтапный процесс. Основным фактором, определяющим этапы перехода от АМО к ММ, является интерпретация. Количество этапов и их содержание зависит от начального (исходного) информационного содержания интерпретируемого математического объекта - математического описания и требуемого конечного информационного содержания математического объекта - модели. Полный спектр этапов интерпретации, отражающий переход от АМО - описания к конкретной ММ, включает четыре вида интерпретаций: синтаксическую (структурную), семантическую(смысловую), качественную(численную) и количественную. В общем случае, каждый из перечисленных видов интерпретации может иметь многоуровневую реализацию. Рассмотрим более подробно перечисленные виды интерпретаций.

*Cинтаксическая интерпретация*

Синтаксическую интерпретацию будем рассматривать как отображение морфологической (структурной) организации исходного АМО в морфологическую организацию структуру заданного (или требуемого) АМО. Синтаксическая интерпретация может осуществляться как в рамках одного математического языка, так и различных математических языков.

При синтаксической интерпретации АМО возможны несколько вариантов задач реализации.

*Задача 1.* Пусть исходный АМО не структурирован, например, задан кортежем элементов. Требуется посредством синтаксической интерпретации сформировать морфологическую структуру математического выражения

(1)



*Задача 2.* Пусть АМО имеет некоторую исходную морфологическую структуру,

которая по тем или иным причинам не удовлетворяет требованиям исследователя (эксперта). Требуется посредством синтаксической интерпретации преобразовать в соответствии с целями и задачами моделирования исходную структуру Stв адекватную требуемую St,т.е.



(2)



*Задача 3.* Пусть АМО имеет некоторую исходную морфологическую структуру St, удовлетворяющую общим принципам и требованиям исследователя с точки зрения её синтаксической организации. Требуется посредством синтаксической интерпретации конкретизировать АМО со структурой Stдо уровня требований, определяемых целями и задачами моделирования



(3)



Таким образом, синтаксическая интерпретация математических объектов даёт возможность формировать морфологические структуры АМО, осуществлять отображение (транслировать) морфологические структуры АМО с одного математического языка на другой, конкретизировать или абстрагировать морфологические структурные представления АМО в рамках одного математического языка.

*Семантическая интерпретация*

Семантическая интерпретация предполагает задание смысла математических выражений, формул, конструкций, а также отдельных символов и знаков в терминах сферы, предметной области и объекта моделирования. Семантическая интерпретация даёт возможность сформировать по смысловым признакам однородные группы, виды, классы и типы объектов моделирования. В зависимости от уровней обобщения и абстрагирования или, наоборот, дифференциации или конкретизации, семантическая интерпретация представляется как многоуровневый, многоэтапный процесс.

Таким образом, семантическая интерпретация, задавая смысл абстрактному ма-

тематическому объекту, "переводит" последний в категорию математической модели с объекта-оригинала, в терминах которого и осуществляется такая интерпретация.

*Качественная интерпретация*

Интерпретация на качественном уровне предполагает существование качественных параметров и характеристик объекта-оригинала, в терминах (значениях) которых и производится интерпретация. При качественной интерпретации могут использоваться графические и числовые представления, посредством которых, например, интерпретируется режим функционирования объекта моделирования.

*Количественная интерпретация*

Количественная интерпретация осуществляется за счет включения в рассмотрение количественных целочисленных и рациональных величин, определяющих значение параметров, характеристик, показателей.

В результате количественной интерпретации появляется возможность из класса, группы или совокупности аналогичных математических объектов выделить один единственный, являющийся конкретной математической моделью конкретного объекта-оригинала.

Таким образом, в результате четырех видов интерпретаций - синтаксической, семантической, качественной и количественной происходит поэтапная трансформация

АМО, например, концептуальной метамодели (КММ) функциональной системы , в конкретную математическую модель (ММ) конкретного объекта моделирования.



Глава Концептуальное метамоделирование функционирования системного

элемента

2.1. Системный элемент как объект моделирования

Понятие "элемент" является одним из фундаментальных в общей теории систем (ОТС) - системологии. Оно происходит от латинского "Elementarius" и имеет смысл: начальный, простой, простейший, конечный, неделимый, лежащий в основе чего-либо.Впервые понятие "элемент" встречается, по-видимому, у Аристотеля в его работе "Метафизика".

Согласно ОТС, любая система (обозначим ее ), независимо от ее природы и назначения, а также от сознания субъекта (эксперта), существует только в структуриро-ванной форме. Структурированность выступает в качестве всеобщего свойства материи - ее атрибута. Именно свойство структурированности, а следовательно, и членимости целостной системы на части приводит к образованию компонент-подсистем и элементов



В целенаправленных действующих системах любой компонент целого характеризуется как поведением, так и строением. В тех случаях, когда при моделиро-вании рассматривается (исследуется) и поведение () и строение (), компонент определяется как подсистема системы . Если же рассмотрению подвергается только поведение компонента , то его определяют как элемент где Е - комплект элементов, выступающий носителем системы . Таким образом, сущность компонента "подсистема" дуальна. Для вышерасположенных компонент подсистема выступает как элемент, а для нижерасположенных - как система.



В системологии понятие "элемент" трактуется двояко - как абсолютная и как относительная категории. Абсолютное понятие элемента определяется физико-химическим подходом, относительное - системологическим.

Понятие абсолютного элемента связано с определением начального мини-мального компонента системы , т.е. такой ее части, которая сохраняет основные



свойства исходной целостной системы . При таком подходе, назовем его молекулярным, понятие "элемент" включает в себя и фиксирует существенные свойства целостной системы .

Понятие относительного элемента () связано с уровнем познания



исходной целостной системы . При этом элемент рассматривается как системная



категория, зависящая от "взгляда" и "отношения" к нему субъекта (исследователя, эксперта). Такой подход к определению элемента назовем системологическим. При системологическом подходе компонент является элементом () только в рамках данного рассмотрения на выделенном уровне анализа. Для системологического подхода понятие элемента, как относительной категории, может быть сформулировано следующим образом.



**Определение 1.** *Элемент - это относительно самостоятельная часть системы,*

*рассматриваемая на данном уровне анализа как единое целое с интегральным поведением, направленным на реализацию присущей этому целому функции.*

С учетом изложенного выше, рассмотрим элемент с точки зрения целостности.

2.2. Целенаправленность системного элемента

Фундаментальным свойством системного элемента является его целенаправленность и, как следствие, способность функционировать. Под функционированием принято принято понимать реализацию присущей элементу функции, т.е.



возможность получать некоторые результаты деятельности системного элемента , определяемые его целевым назначением.



Целенаправленно действующий системный элемент должен обладать, по крайней мере, тремя основными атрибутами:



- элемент выполняет одну или несколько функций,



- элемент обладает определенной логикой поведения,



- элемент используется в одном или нескольких контекстах.



*Функция* указывает на то, "что делает элемент ".



*Логика* описывает внутренний алгоритм поведения элемента , т.е. определяет "как элемент реализует свою функцию".



*Контекст* определяет конкретные условия применения ( приложения ) элемента в тех или иных условиях, в той или иной среде.



Таким образом, принимая во внимание изложенное, можно определить содержательно что такое модель функционирования системного элемента .



**Определение 4.** *Модель функционирования элемента ( МФЭ )* - *это отражение на неко-тором языке совокупности действий, необходимых для достижения целей ( целевой функции ), т.е. результата функционирования элемента . МФЭ не учитывает строение, а также способы и средства реализации элемента. Такая модель устанавли-вает факт "Что делает элемент для достижения результата ", определяемого его целевым назначением.*



2.3. Целостность системного элемента

Целостность одно из основных свойств (атрибутов) системного элемента. Она отражает завершенную полноту его дискретного строения. Правильно сформированный

системный элемент () характеризуется явно выраженной обособленностью (границами) и определенной степенью независимости от окружающей его среды. Относительная независимость системного элемента определяется (характеризуется) совокупностью факторов, которые назовем факторами целостности.



*Факторы целостности* Полная совокупность факторов целостности элемента определяется двумя группами, которые назовем внешние факторы целостности и внут-ренние.



*Внешние факторы* 1. Низкий уровень связности (число взаимосвязей) элемента с ок-ружающей его средой , т.е. минимальная внешняя связность элемента . Обозначив полную совокупность внешних связей элемента через , рассматриваемый фактор запишем как условие минимизации: Min.



2. Низкий уровень взаимодействия элемента с окружающей его средой



,т.е. слабое взаимодействие, определяемое минимальной совокупной интенсивностью обмена сигналами Min.



*Внутренние факторы* 1. Высокая степень связности друг с другом частей, из которых состоит элемент , т.е. суммарная внутренняя связность максимальна Max.



2. Высокая интенсивность взаимодействия частей, из которых состоит элемент . Иными словами, имеет место сильное внутреннее взаимодействие Max.



*Оценка целостности элемента* Перечисленные выше факторы могут быть использованы для оценки целостности системного элемента . Такая оценка, в определенной мере, характеризует степень "прочности" элемента по отношению к окружающей его



среде .



Введем понятие "прочность" как показатель внутренней целостности элемента и

определим его через суммарную композицию показателей взаимосвязей и взаимодействий всех частей, из которых состоит элемент . Прочность элемента при



этом определяется выражением

(1)



Для обобщенной оценки внешних взаимосвязей и взаимодействий элемента



с окружающей его средой введем показатель "сцепленности" и определим его как композицию показателей и , т.е.



(2)



Полученные показатели прочности (1) и сцепленности (2) используем для оценки

целостности элемента . Такая оценка определяется отношением вида



(3)



т.е. как отношение прочности элемента к его сцепленности со средой .



С учетом (1) и (2) выражение (3) принимает вид

(4)



*Уровни целостности элемента* Анализ выражений (3) и (4) дает возможность ранжи-ровать элементы по уровням целостности и качественно определить их устойчи-вость по отношению к окружающей среде.



Случай 1. Если значение показателя прочности элемента превосходит значение показателя сцепленности элемента с его средой , т.е. > , а как следствие и > 1, то элемент по своим целостным свойствам устойчив. В рассматриваемом случае имеет место супераддитивная целостность.



Случай 2. Пусть значения показателей прочности и сцепленности равны,



т.е. = . В этом случае показатель целостности = 1. Тогда элемент по своим целостным свойствам находится на грани устойчивости. Такой уровень целостности элемента определим как аддитивная целостность.



Случай 3. Наконец, пусть значения показателя прочности элемента ниже значений показателя сцепленности элемента с его средой . В рассматриваемом случае условия записываются в виде < и < 1. При этом элемент по своим целостным свойствам не устойчив к интегральному вовлечению (растворению) в окружающей среде . Рассматриваемый уровень целостности элемента определим



как субаддитивная целостность.

Таким образом, введенный показатель может использоваться как критерий



оценки качества целостных свойств элемента , а также для сравнения раэличных элементов ( = 1, 2, ... , N) по критерию целостности.



2.4. Метод концептуального метамоделирования

Концептуальное метамоделирование ( КММ ) основано на использовании индуктивно-дедуктивного подхода. Создание КММ осуществляется на основе индуктивного подхода ( от конкретного к абстрактному, от частного к общему ) посредством обобщения, концептуализации и формализации.

Использование КММ предполагает переходы от общего к частному, от абстрактного к конкретному на основе интерпретаций.

КММ функционирования системного элемента предполагает описание динамики поведения на заданном уровне абстракции с точки зрения его взаимодействия с окружающей средой, т.е. внешнего поведения. Математическое описание такого элемента должно отражать последовательность причинно-следственных связей типа "вход - выход" с заданной временной направленностью из прошлого в будущее. КММ функционирования системного элемента должна учитывать базовые концепции и существенные факторы, к числу которых, в первую очередь, следует отнести следующие.



1. Элемент , как компонент системы , связан и взаимодействует с другими компонентами этой системы.



2. Компоненты системы воздействуют на элемент посредством входных сигналов, в общем случае, обозначаемых векторным множеством .



3. Элемент может выдавать в окружающую его среду выходные сигна-лы, обозначаемые векторным множеством .



4. Функционирование системного элемента ( ) происходит во времени с заданной временной направленностью от прошлого к будущему: где



5. Процесс функционирования элемента представляется в форме отображения входного векторного множества в выходное - , т.е. по схеме "вход - выход" и представляется записью вида



.



6. Структура и свойства отображения при моделировании на основе метода прямых аналогий определяется внутренними свойствами элемента , во всех остальных случаях - инвариантны и связаны феноменологически.



7. Совокупность существенных внутренних свойств элемента , представ-ляется в модели "срезом" их значений для фиксированного момента времени , при



условии фиксированного "среза" значений входных воздействий и определяется как внутреннее состояние элемента .



8. Внутренние свойства элемента характеризуются вектором параметров



, которые назовем функциональными ( - параметры ).



Концептуальное математическое описание системного элемента ( )



с учетом изложенных выше положений, представим кортежем

. ( 1 )



Такое описание определим как концептуальную метамодель - КММ функционирования системного элемента .



2.5. Стратифицированный анализ и описание КММ системного элемента

Концептуальные метамодели элемента, основанные на записи ( 1 ), могут образовывать некоторые иерархии. Уровни таких иерархий определяются степенью ( этапами ) конкретизации свойств элемента. Ранжирование КММ ( 1 ) по шкале "Абстрактное - Конкретное" на основе метода стратификации, следовательно, приводит к иерархической дедуктивной системе концептуальных метамоделей. Такая система может быть использована для математического моделирования конкретных элементов как некоторый исходный базовый инвариант, интерпретируемый в конкретную математическую модель.

В зависимости от степени конкретизации, сформируем дедуктивную систему, вклю-чающую следующие уровни КММ элемента :



КММ элемента на теоретико-системном уровне ( ТСУ );



КММ элемента на уровне непараметрической статики ( УНС );



КММ элемента на уровне параметрической статики ( УПС );



КММ элемента на уровне непараметрической динамики ( УНД );



КММ элемента на уровне параметрической динамики ( УПД ).



Рассмотрим более подробно КММ на каждом из перечисленных уровней.

КММ теоретико-системного уровня

Наиболее общую и абстрактную форму описания функционирования системного

элемента дает концептуальная метамодель теоретико-системного уровня ( ТСУ ). Это описание включает векторное множество входных воздействий на элемент



и векторное множество выходных реакций ( откликов ) элемента



.



Кроме того, на рассматриваемом уровне абстракции учитывается факт связности векторного множества с соответствующим векторным множеством посредством отображения "". Однако, отображение "" не указывает каким образом рассматриваемые множества связаны.



Таким образом, КММ теоретико-системного уровня задаются тройкой

. ( 2 )



КММ уровня непараметрической статики

Второй уровень представления КММ включает в рассмотрение отображение , определяющее правила преобразования входов в выходы , т.е. что необходимо сделать, чтобы при условии получить , адекватное целевому функционированию элемента . В общем случае - отображение может быть представлено скалярной или векторной функцией, а также функционалом или оператором. Концептуальная метамодель уровня непараметрической статики, следовательно, представляется кортежем вида



. ( 3 )



Раскрытие структуры преобразования вида является основной задачей КММ уровня . Рассмотрим в качестве иллюстрации функциональное описание элемента , представленное скалярной функцией , причем: .



Функционирование элемента ( ) на УНС описывается как отображение . Это отображение называется функцией, если оно однозначно. Условия однозначности определяются следующим образом. Пусть заданы пары значений



сигналов "вход - выход":

( 4 )



Если из условия ( ), следует, что ( ), то отображение однозначно. Значение величины в любой из пар называется функцией от данного . Общий вид записи функции позволяет дать формальное



определение функции элемента в скалярной форме представления



( 5 )



Таким образом, КММ ( 3 ) проинтерпретирована в КММ того же уровня, но в скалярной форме функционального представления. Отметим, что богатство концептуальных метамоделей функционирования системного элемента ( ) на уровне непараметрической статики определяется многообразием ее интерпретаций на математическом, логическом или логико-математическом языках описания ( представления )



- отображения.



КММ уровни параметрической статики

Дальнейшая конкретизация КММ функционирования системного элемента



осуществляется за счет включения в рассмотрение функциональных параметров , определяющих статические режимы. Для элемента рассматриваются три группы параметров



( 6 )



где - совокупность параметров { } входных воздействий



- совокупность параметров { } выходных реакций ( откликов )



- совокупность параметров { } отображения .



Перечни ( номенклатура ) параметров и их значений определяются для каждого типа конкретной модели . Для - отображения, по аналогии со структурными моде- лями, вводится понятие конфигурации. С учетом параметрического описания и интерпретаций КММ задается четверкой



( 7 )



КММ уровня непараметрической динамики

Следующий, четвертый уровень конкретизации КММ функционирования системного элемента определяется учетом в модели его динамических свойств. Динамика элемента рассматривается в нескольких аспектах. Первый аспект характеризуется реакцией элемента на динамику изменения входных воздействий



при неизменном отображении , т.е. когда - скалярная или векторная функция. Второй аспект определяется реакцией элемента на входные ( статические или динамические ) воздействия при времязависимом отображении , т.е. когда -



функционал или оператор, зависящий от времени .



При изложенных условиях КММ рассматриваемого уровня абстракции представляется кортежем, включающем следующие четыре компоненты

( 8 )



Отметим, что на данном уровне представления КММ время указывает на факт



наличия динамических свойств, но не характеризует их конкретно.

КММ уровня параметрической динамики

Последний - пятый уровень дедуктивного представления КММ функционирования системного элемента , определяемый как уровень параметрической динамики, включает все рассмотренные ранее аспекты модели, представляемые кортежем ( 1 )



.



В КММ рассматриваемого уровня выполняются условия концептуальной полноты представления функциональных свойств элемента . Интерпретация та- кой модели на семантическом, синтаксическом, качественном и количественном уровнях дает возможность порождать ( генерировать ) любые конкретные математические модели функционирования системного элемента.



Отметим, что выражения ( 1 ), ( 2 ), ( 3 ), ( 7 ) и ( 8 ) могут быть представлены в форме традиционных аналитических зависимостей вида

( 9 )



Выводы

Таким образом, концептуальное метамоделирование функционирования системного элемента на основе дедуктивного подхода приводит к пятиуровневой иерархии моделей, представленной на рис. .



Практическое использование представленных выше КММ для моделирования функций системных элементов осуществляется посредством их ретрансляции в тер-минах выбранного математического языка и последующей интерпретации на четырех перечисленных выше уровнях конкретизации.

